

CSAPÓ BENŐ

A KOMBINATIV KÉPESSÉG ÉS ÉRTÉKELÉSÉNEK  
FELTÉTELEI

Egyetemi doktori értekezés

SZEGED

1979

## TARTALOM

BEVEZETÉS	3
I. A KOMBINATORIKA MINT OBJEKTIVÁLT TUDÁS	7
1. A kombinatorikai ismeretek és a köznyelvi fogalmak	7
2. A kombinatorika kialakulása és fejlődése	11
3. A kombinatorika alapfogalmainak rendszere	18
Az elemzés elvi kérdései	18
Taxonómiai strukturák	20
Logikai strukturák	29
II. A KOMBINATIV KÉPESSEG MINT PSZICHIKUS RENDSZER	44
1. A képesség mint pszichikus rendszer	44
2. A kombinativ képesség tágabb és szűkebb fogalma	59
3. A szűkebb értelemben vett kombinativ képesség	67
A kombinativ műveleti képesség mint egész	70
A kombinativ műveletek	84
A műveletvégzés során kezelendő elemek száma	91
A művelet működésének és a tartalomnak a kapcsolata	97
4. A kombinativ képesség és a képességek rendszere	100
III. A KOMBINATIV KÉPESSEG ISKOLAI FEJLESZTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI	111
1. Matematika-tanítás és képességfejlesztés	111
2. A kombinativ képesség fejlesztésének lehetőségei	118
ÖSSZEGZÉS	129
IRODALOM	131

### BEVEZETÉS

Napjainkban az iskolai oktatás hatékonyabbá, eredményesebbé tételének talán egyik legfontosabb feltétele a pedagógiai értékelés problémáinak megoldása. A tanulást csak akkor lehet tudatosan irányítani, az iskolai oktatásban csak akkor lehet bármilyen tervezett és ellenőrzött változást elérni, ha rendelkezésre állnak az eszközök, amelyekkel meggyőződhetünk arról, hogy egy adott tevékenység vagy változás a kívánt irányba hat-e, eléri-e a célját.

A pedagógiai értékelés már akkor is nehéz feladatot jelent, ha csak a tudás egyszerűbb összetevőinek a meglétét, ismeretek elsajátítását akarjuk vizsgálni. Ilyen esetekre azonban a mérés elméleti és gyakorlati problémáinak a többsége már megoldott, kidolgozott mérési módszerek állnak rendelkezésre és válnak egyre inkább rutineljárássá. Ezek az eljárások többnyire csak a tudás aktuális szintjét, időleges komponenseinek a meglétét vagy hiányát tudják biztonsággal feltárni.

Az iskolai oktatás célja azonban elsősorban nem ismeretek tanítása, hanem a személyiség fejlesztése, állandósult, a személyiségben tartósan beépülő, maradandó tudás kialakítása, képességek kifejlesztése.

A tudás állandósult, tartós személyiségjeggyé váló elemeinek mérése, az alapvető képességek lényegének megragadása, fejlődési szintjeik feltárása az eredménymérés legfontosabb és egyben talán legnehezebb feladata. Ezen a területen a fő nehézséget sokkal inkább a megfelelő kritériumok megtalálása,

annak meghatározása jelenti, hogy mi is az valójában, amit mérni kell, vagy mérni érdemes, mint magának a mérőeszköznek az elkészítése. Valószínűleg éppen ez az oka annak, hogy az alapvető, vagy általános képességek értékelésének, mérésének módszerei még csak kialakulóban vannak.

Valószínűleg tudásunk ilyen alapvető összetevője, személyiségünkbe tartósan beépülő része a kombinativ képesség.

Gondolkodásunkban, tevékenységünkben szinte mindig jelen van bizonyos kombinativ mozzanat. Kombinativ műveleteket végzünk, "kombinálnunk" rendszerint anélkül, hogy ez tudatosulna bennünk.

Gyakran kell megoldanunk olyan problémákat, amelyek során sokféle eseményt, események következményét vagy összes lehetséges kimenetelét kell számításba vennünk, mérlegelnünk. A lehetőségek számbavétele, szelektálása gyakran nem is tudatos, az irreleváns eseteket eleve figyelmen kívül hagyjuk, csak a számunkra fontosakat vizsgáljuk.

Mindennapi tevékenységeinkben sem ritkák az olyan feladatok, amelyek során dolgokból, elemekből kell valamilyen egységet, egészt létrehozni, konstruálni. Ilyenkor a célt rendszerint többféle megoldás is kielégíti, de közöttük minőségi különbség lehet. Az optimális megoldás, a legjobb konstrukció megtalálása általában megkívánja, hogy a célnak megfelelő többféle, esetleg az összes lehetőséget megkeressük, megvizsgáljuk.

Néha viszont a feladat éppen az, hogy dolgok, körülmények, feltételek, események nem nyilvánvaló, szokásostól eltérő, újszerű együttesét, összeállítását hozzuk létre, lehetőleg minél gazdagabban, változatosabban.



Ezek az egymástól látszólag szélsőségesen különböző tevékenységek mind a kombinatív képesség működését valósítják meg, bennük a kombinatív képesség viszonylag kifejezetten, közvetlenül nyilvánul meg.

A kombinatív képességnek azonban e közvetlen működésén túl van kevésbé kifejezett, közvetett hatása is tevékenységeinkre. Átszövi gondolkodásunkat, beépül a képességek rendszerébe, részét képezi olyan általános képességeknek, mint a problémamegoldó gondolkodás képessége, a kreativitás, a fantázia.

Ezzel az alapvető képességgel a pedagógia viszonylag keveset, legfeljebb érintőlegesen foglalkozott, holott tudatos, tervszerű fejlesztése jelentősen hozzájárulna a különböző képességek és az egész személyiség fejlődéséhez. A tervszerű fejlesztés azonban csak akkor lehetséges, ha feltárjuk, ismerjük a kialakulás folyamatát. A képesség kiépülésének empirikus vizsgálatához értékelő eszközökre van szükség, ami viszont csak a képességnek valamifajta előzetes koncepciója, hipotetikus modellje alapján készíthető el.

Amint látható, a kombinatív képesség értékelésének kidolgozásához - majd tervszerű fejlesztéséhez - több egymásba fonódó, egymásra épülő lépésen keresztül vezet az út, és e lépések közül az első szükségszerűen a képesség lényegének, mi-lénlétének tisztázása, tartalmi elemzése.

E dolgozat célja az, hogy a kombinatív képességnek egy ilyen előzetes koncepcióját, hipotetikus modelljét kidolgozza, lényegesebb vonásait tisztázza.

A feladat jellegéből következik, hogy közvetlenül a kom-

binatív képességre vonatkozóan viszonylag kevés ismeret áll rendelkezésre, ezért csak a dedukció és a többirányú, komplex megközelítés vezethet eredményre. Így a kombinatív képesség feltárásnak alkalmas kiindulópontja lehet az objektíválódott tudás és a pszichikus rendszerek elemzése.

A kombinativitással, "kombinálással" kapcsolatos ismeretek elsősorban a matematika egyik ágában, a kombinatorikában objektíválódtak. A kombinatorika tudományának gyökerei a köznapigondolkodásig, a kombinatív képesség működése által megvalósuló tevékenységekig vezethetők vissza. A kombinatorikai ismeretek elemzésével a kombinatív tevékenység fontosabb formáit és ezek kapcsolatait gyűjthetjük össze, így a kombinatorika elemzése elsősorban a képesség tartalmi oldalának vizsgálatát segíti.

A pszichikus rendszerekre vonatkozó ismeretek, törvények figyelembevételével körülhatárolhatjuk, mi az, amit a kombinatív képesség a kombinatorika által nyújtott elvi lehetőségek közül megvalósíthat, és a képességnek milyen, a kombinatorikán tulmutató összetevői vannak. Ugyancsak a pszichikus törvények figyelembevételével tárhatjuk fel a képesség működését is.

E célkitűzéseknek megfelelően a dolgozat első fejezete tartalmazza az objektíválódott tudás elemzését, a második fejezet pedig a kombinatív képességnek mint pszichikus rendszernek a leírását.

A harmadik fejezet a kombinatív képesség iskolai oktatás során történő fejlesztésének néhány alapvető kérdését, a tudatos, tervszerű fejlesztés fontosabb kritériumait elemzi.

## I.

A KOMBINATORIKA MINT OBJEKTIVÁLT TUDÁS1. A KOMBINATORIKAI ISMERETEK ÉS A KÖZNYELVI FOGALMAK

A matematika legfontosabb alapfogalmai a köznyelvből származnak. A matematika különböző ágai kezdetben az ember mindennapi tevékenységével álltak szoros kapcsolatban. A tudás, így a matematikai ismeretek fogalmi objektiválása is, csak maguknak a fogalmaknak a megjelenésével, kialakulásával válik lehetővé. Így a matematikai ismeretek objektiválódásának az az első lépése, hogy megjelennek az ember mindennapi tevékenysége, gondolkodása során végzett műveleteknek a megnevezései.

E megnevezések valójában azáltal válnak matematikai fogalmakká, hogy a matematika e fogalmakat explikálja, jelentésüket pontossá, egyértelművé teszi, és kidolgozza a rájuk vonatkozó ismeretek, szabályok rendszerét.

A szóbanforgó ismeretek kialakulásának így legalább három fokozatát érdemes megkülönböztetni. Az első lépés maguknak a különböző tevékenységeknek, gondolkodási műveleteknek a megjelenése, kialakulása. Ezeket az emberek valószínűleg nagyon hosszú ideig végezhatték, anélkül, hogy létezésük egyáltalán ismertté, megnevezésük szükségessé vált volna.

A második lépés, a tevékenységek, műveletek létezésének, közös vonásainak felismerése, köznyelvi megnevezéseinek kialakulása már absztrakció eredménye, és ez egyben a róluk való tudás első elemeinek és a tudatosulás lehetőségének a megjelenése. A harmadik fejlődési fok a köznyelvi fogalmak /és a mögöttük levő tevékenységek, műveletek/ tudományos igényű vizsgálata, a tudományos ismeretrendszer kialakulása. Ezen a ponton a fogalmak és az ismeretrendszer fejlődése elszakad a köznyelvtől és a mindennapi gondolkodástól, saját, önálló belső törvényei szerint alakul tovább, és csak áttételesen, kismértékben hat vissza a köznyelvre.

Jó példa lehet a fejlődési folyamat egyes szakaszaira a logikai ismeretek és a matematikai logika kialakulása. Az emberek hosszú ideig végeztek logikai műveleteket, helyesen következtettek, amíg a megnevezés igénye felmerült. Majd a köznyelvi fogalmak használatuk és a róluk való eszmecsere folytán bizonyos fejlettséget értek el, amikor Arisztotelész már tudományos igénnyel hozzáfoghatott a helyes következtetések szabályainak lefektetéséhez.

A köznyelv fogalmai így bizonyos információt hordoznak a gondolkodási műveletekről is. A köznyelv fogalmai, a fogalmak fejlettsége, differenciáltsága egyben azt is jelzi, hogy az adott nyelvi környezetben élő egyénben "direkt" tanulás nélkül, pusztán a köznyelv elsajátítása által milyen mértékben tudatosulnak a megfelelő gondolkodási műveletek.

A köznyelvi fogalmak rövid vizsgálata számunkra azért is szükséges, mert bizonyos értelemben közelebb állnak az ember mindennapi tevékenységéhez, a tevékenységekben kifeje-

zódó képességekhez mint a hosszú fejlődésen keresztülment matematikai fogalmak.

Nézzük meg tehát röviden, mit fejeznek ki a kombinatív képességgel, a kombinatorikával kapcsolatos köznyelvi fogalmaink, vagyis mit tudunk "köznyelvi szinten" arról a tevékenységünkről, amelynek során kombinálunk.

A magyar nyelv értelmező szótára a "kombináció" szó jelentését /jelentéseit/ a következő módon határozza meg:

"kombináció:

1. /Menny./ Az az eljárás, amelynek során adott elemekből, számokból csoportokat alkotunk úgy, hogy közülük bizonyos számot kiválasztva, ezeket bizonyos sorrendben egymás mellé helyezzük. Ennek eredményeként létrejött csoport, elrendezés.
2. Az a cselekvés, eljárás, művelet, melynek során két vagy több tárgyból, dologból, elemből összeállítunk, egybeszerkesztünk valamit. Ennek eredményeként létrejött egység, készítmény, alkotás.
3. A lehetőségeknek, eshetőségeknek sokoldalu, gondos számításba vétele, s az ennek alapján következetesen végrehajtott cselekvések sorozata. Lehetőségek összevetéséből, mérlegeléséből adódó terv, elképzelés, feltevés."

/A magyar nyelv értelmező szótára IV. köt. Bp. 1961. 288.o./

Az értelmező szótár által felsorolt jelentések közül az első a kombináció matematikai fogalmának felel meg, a második és a harmadik pedig a "kombináció" szó köznyelvi jelentését írja körül. Amint a meghatározásokból látszik, a köznyelvi jelentés a matematikait is magában foglalja, de annál sokkal tá-

gabb. Az összeállításon, egybeszerkesztésen túl kifejezi a lehetőségek sokoldalú számításba vételét, a következetességet, a mérlegelést is.

A latin eredetű "kombináció", "kombinál" szavak nyelvünkben viszonylag elterjedtek, az átlagos műveltségű embernek legalább a passzív szókincséhez tartoznak. Így nemcsak kombinálunk, különböző kombinatív tevékenységeket végzünk, hanem tudunk is arról, hogy léteznek ilyen tevékenységek. A tevékenységek szabályaival, szerkezetével kapcsolatos ismeretek azonban már nem rögzitődtek a köznyelvben.

A kombinatorika többi alapfogalma a köznyelvben alig fordul elő. Csupán a "variáció", "variál" fogalmak tartoznak a köznyelvhez. A "variáció" egyszerűen a "változat" jelentéssel, míg a "variál" "a lényeg megtartásával más alakban, más elrendezésben /többször/ ismétel valamit" /A magyar nyelv... 1961. VII. 245.o./ értelemben tulajdonképpen a "kombinál" szinonimája.

A köznyelvben tehát a kombinatív tevékenység fogalma nem differenciálódik.

Itt érdemes kitérni egy terminológiai kérdésre is. A "kombináció" és a megegyező tövű szavakból többféleképpen lehet melléknévet képezni. Ez módot ad arra, hogy az objektívalódott tudással és a pszichikus rendszerekkel kapcsolatos kifejezéseket formailag is megkülönböztessük. Ezért a továbbiakban a "kombinációs", "kombinatorikus", "kombinatorikai" kifejezéseket az objektívált tudással, a matematikai ismeretekkel összefüggésben fogom használni /pl. kombinatorikai műveletek/, a "kombinatív" melléknévet pedig a gondolkodással, a pszichikus rendszerekkel kapcsolatban /pl. kombinatív műveletek/.

## 2. A KOMBINATORIKA KIALAKULÁSA ÉS FEJLŐDÉSE

A kombinatív képesség vizsgálatához, a gondolkodásban betöltött szerepének tisztázásához hasznos szempontokat ad a kombinatorikai ismeretek kialakulásának, a tudományág fejlődésének áttekintése.

A kombinatorika legrégebb gyökerei az ősi Kinába nyulnak vissza. A legenda szerint Yu kínai császár /ie. 2200 körül/ tanulmányozta a bűvös négyzetet és megfontolásai között a kombinatorika bizonyos elemei is szerepelnek. Az ie. 1100 körül élt kínai matematikusok munkáiban már megtalálhatók a permutációkkal kapcsolatos problémák.

A pythagoreusok /ie. 500-400/ is vizsgáltak már néhány kombinatorikával kapcsolatos feladatot, ezek azonban sokkal inkább a számmiszticizmusukkal voltak kapcsolatban, mint a gyakorlati problémákkal.

A középkori matematikában az algebrai és aritmetikai feladatok között fordulnak elő kombinatorikai természetűek. Ben Erza rabbi /1140 körül/ már valószínűleg ismerte az ismétlés nélküli kombinációk számának megadására szolgáló formulát. Igen sok kombinatorikus természetű feladatot vizsgáltak a Fibonacci számokkal kapcsolatban is. Ebben az időben azonban még csak egyes problémák megoldásával foglalkoztak, a legegyszerűbb kombinatorikai feladatok között is volt még számos megoldatlan, nem is vizsgált kérdés, a kombinatorika nem képezett összefüggő ismeretrendszert.

A kombinatorika több alapvető problémáját oldotta meg Fermat /1601-1665/ és Pascal /1623-1662/, de kombinatorikáról, mint rendszerezett tudásról, a matematika önálló ágáról csak Leibniz /1646-1716/ óta beszélhetünk.

A kombinatorikának, illetve a kombinatív képességnek a megismerésben betöltött szerepét vizsgálva is figyelmet érdemel az az út, amelyen Leibniz eljutott a kombinatorikához.

Leibniz életének fő mozgatórugója az volt, hogy olyan egyetemes módszert találjon, amely új találmányokhoz, felfedezésekhez vezet és lehetővé teszi a világegyetem lényeges egységének a megértését is. A "scientia generalis"-t akarta felépíteni, melynek sok oldala volt. A "characteristica generalis" keresése vezette el a permutációkhoz, kombinációkhoz, szimbolikus logikához, ami egyben a "lingua universalis" alapja is lett volna. Olyan általános nyelv, ami a gondolkodás, számolás minden tévedését kiküszöbölné.

Dissertatio de arte combinatoria /1666/ c. művében a kombinatorikus művészetet mint a sorrend, a viszony, a hasonlóság, általában a szimbólumokkal kifejezhető minőségi kapcsolatok tudományát írja le. Ez lenne Leibniz szerint a mennyiségi összefüggéseket tárgyaló matematikát magában foglaló új matematika. Azért foglalkozott intenzíven a kombinatorikával, mert remélte, hogy az elvezeti a matematika feletti matematikához.

A kombinatorikával mutatott hasonlósága miatt fordult érdeklődése az infinitezimális számítás kérdései felé is, ami-  
ben a változás, a mozgás "lingua universalis"-át vélte megtalálni.



Az indexeket szintén Leibniz vezeti be 1700 táján, ami abban az időben igen nagy előrelépést jelentett.

Jacob Bernoulli /1654-1705/ *Ars conjectandi* /A találgatás tudománya, 1713/ c. valószínűségszámítással foglalkozó könyvében a kombinatorikát a valószínűségszámításhoz szükséges apparátusként vezeti be. Ezután a kombinatorika, legalábbis ami az általános, elméleti vonatkozásokat illeti, több mint egy fél évszázadig alig fejlődik valamit.

Megkezdődik viszont a kombinatorika módszereinek, eredményeinek felhasználása a matematika más ágaiban. Először a számelméletben és az analízisben, majd L. Euler /1707-1783/ alkalmazza a geometriában a kombinatorikai megközelítésmódot, ami már előzménye a kombinatorikus geometriának, a gráfelméletnek és a kombinatorikus topológiának.

Az elmélet újabb fejlődése 1780 után bontakozik ki, amikor K.F. Hindenburg és iskolája kezd intenzíven foglalkozni a kombinatorikai problémákkal. Fő művével /*Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, 1796/ a kombinatorika fejlődésének első szakasza szinte le is zárul, és a következő másfél évszázad során a kombinatorikát a stagnálás és a szerény eredmények jellemzik.

Nem így áll a helyzet a kombinatorika alkalmazásával. A természettudományok fejlődése egyre több olyan problémát vet fel, amelyekben a kombinatorika eredményeinek felhasználása válik szükségessé. Így Kirchhoff /1847/ a fizikában alkalmazza sikerrel a kombinatorikai-gráfelméleti megközelítésmódot és a szerves kémiában a lehetséges izomerek számának meghatározása ugyancsak a kombinatorika felhasználását igényli. A statisztika

tikus mechanika, a statisztika, a valószínűségszámítás szintén felhasználja a kombinatorikát. Ugyancsak a kombinatorikából nőtt ki, annak egy ágaként indult, majd önálló elméletté terebélyesedett a von Sylvester /1878/ által megalapozott gráfelmélet.

A kombinatorika újbóli felvirágzása a 20. század közepén kezdődött annak felismerésével, hogy a kombinatorikus analízis számos gyakorlati probléma megoldására alkalmas. Napjainkban is a matematika egyik leggyorsabban fejlődő ága, és a matematikának igen sok területét mintegy "keresztülmetshi".

Magát a kombinatorikát úgy lehetne meghatározni, hogy az a véges halmazok elmélete. /Ilyen értelemben a kombinatorika beleilleszkedik a halmazelméletbe, annak részeként. Mégis e két területet szokás különválasztani, mert halmazelméleten szorosabb értelemben a végtelen halmazok elméletét értik./

A kombinatorikai kutatások két fő típusba sorolhatók. Az egyik csoportba tartoznak azok a problémák, amelyekben a vizsgált konfigurációk létezése kétséges /existence problems/. Ilyenkor a feladatot a megoldás létezésének, vagy éppen a lehetetlenségének bizonyítása jelenti. A problémák másik típusánál a megoldás létezése ismert, és a feladat a különböző konfigurációk, lehetőségek számának a meghatározása és/vagy a lehetőségek osztályozása és/vagy felsorolása /enumeration problems/.

A kombinatorikus módszereket, a kombinatorika eredményeit ma már szinte a matematika valamennyi ága felhasználja. A kombinatorika behatolt mind a "tisztá", mind az alkalmazott matematika területeire. Fejlődését meggyorsítja az a tény,

hogy a matematikai módszerek egyre több olyan területet hódítanak meg, ahol a numerikus eljárások szerepe kisebb /pl. társadalomtudományok/. E területek jelentőségét bizonyítja az is, hogy ma már nemcsak egy-egy cikk vagy tanulmány, hanem mind több, az eredményeket áttekintő önálló monográfia lát napvilágot. A teljességre nem törekedve csak a legfontosabb alkalmazási területeket sorolom fel.

Az absztrakt algebra és a kombinatorika kapcsolata kézenfekvő, hiszen az absztrakt algebrában is igen gyakran van szükség véges halmazok kezelésére.

Szintén gyorsan fejlődő diszciplína a kombinatorikus topológia és a kombinatorikus geometria. /Boltyanszkij-Gohberg 1970/. Ezek a topológikus tereket, illetve a geometriai objektumokat úgy tanulmányozzák, hogy kisebb alakzatokra, meghatározott módon kapcsolódó építőelemekre bontják. Kifejlődésük kezdeti szakaszában csak kombinatorikus módszereket alkalmaztak, ma azonban már az algebrai, főleg a csoportelméleti eszközök is szerepet kapnak.

Sajátos kapcsolat alakult ki a gráfelmélet és a kombinatorika között. A gráfelmélet a kombinatorikából "nőtt" ki, és önálló diszciplínává válása után is egyik legfontosabb eszköze maradt a kombinatorika. A gráfelmélet alkalmazási területe is igen széles, a hálózatok analízisétől a szállítási problémák vizsgálatáig igen sok gyakorlati feladat megoldásában jelent hasznos eszközt. A gráfok egyik legfontosabb alkalmazása a különböző matematikai objektumok reprezentálása /pl. relációk, leképezések stb./, így a kombinatorikában is a felsorolások, osztályozások reprezentálásának legfontosabb eszközei.

Elterjedtek a kombinatorikus módszerek az operációkutatásban és a lineáris programozásban /diszkrét programozásban/ is. /Kovács L. B. 1969; Wells, M. B. 1971./ Ezeket a módszereket általában olyan problémák megoldására lehet felhasználni, amikor bizonyos behatárolt körülmények között kell optimális megoldást találni. Matematikai értelemben pedig egy általában többváltozós függvény minimumát vagy maximumát kell megtalálni a változók megadott tartományában olyan esetekben, amikor a változók, vagy azok egy része csak véges /vagy megszámlálhatóan végtelen/ sok értéket vehetnek fel. A programozás kombinatorikus módszereinek igen fontos részét képezik a különböző leszámplálási algoritmusok.

És ezzel már az algoritmusok elméletének területére érkeztünk. /Lovász-Gács: Algoritmusok 1978./ A kombinatorikai algoritmusok a legkülönbözőbb gyakorlati problémák optimális, rendszerint legrövidebb, leggazdaságosabb megoldásának a megtalálását teszik lehetővé, és a megfelelő tevékenység mechanizálását, automatizálását, gépesítését.

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika kialakulásuktól kezdve szoros kapcsolatban fejlődtek a kombinatorikával. Ezeken a területeken keresztül ugyancsak igen korán kapcsolódott az információelmélethez és a biomatematikába is. Ujabban a biomatematikához "önálló" kombinatorikai problémák is felmerülnek /genetika, gyógyszerkutatás stb./.

A játékelméletben a különböző stratégiavariánsok figyelembevétele, az összes lehetőség megvizsgálása a kombinatorika és a valószínűségszámítás nélkül lehetetlen lenne. Ugyanígy a játszmák, játszmaváltozatok vizsgálata is komoly kombinatorikai apparátust igényel.

A kombinatorikus logika ugyancsak fiatal, de annál gyorsabban fejlődő ága a matematikának. /Curry, H. - Feys, R. 1974./ A matematikai logika a matematikában és a gyakorlati életben előforduló feladatok széles területén ad hasznos eszközöket, ugyanakkor érvényességi területe erősen lehatárolt és messze nem alkalmas az emberi gondolkodás sokoldalúságának, változatosságának a teljes reprezentálására. E hiányosság orvoslására a logika érvényességi körének kiterjesztésére számos megoldás született, logikák sora jött létre /pl. valószínűségi logika, modális logika stb./. Így ugyancsak fontos területeket hódít meg a logika számára a kombinatorikus logika is.

A kombinatorika módszerei bevonultak a nyelvészetbe is. /Herden, G. 1966./ A matematikai nyelvészet eszköztárának jelentős részét képezik a kombinatorika közvetlen vagy közvetett alkalmazásai.

### 3. A KOMBINATORIKA ALAPFOGALMAINAK RENDSZERE

#### Az elemzés elvi kérdései

Mielőtt a kombinatorika alapelemeit vizsgálni kezdeném, szükség van az elemzés elvi szempontjainak tisztázására.

A pedagógiában a tananyag, a tankönyvek vizsgálatának, strukturális elemzésének vannak már kialakult módszerei /Nagy J. 1972., Horváth Gy. 1972./. Esetünkben azonban első-sorban nem tankönyv- vagy tananyagelemzésre, hanem magának az objektivált tudásnak az elemzésére van szükség. Ezt a tudást viszont mindig könyvek, tankönyvek hordozzák, így a strukturális elemzés kialakult formái némi kiegészítéssel felhasználhatók.

Egy közelmúltban megjelent OPI dokumentum a strukturális elemzés két fő formáját különbözteti meg:

1. Egy ismert struktúra vizsgálata valamilyen belső vagy külső kritériumoknak való megfelelés szempontjából.
2. Egy dolog strukturájának feltárása. "Ez fordított és módszertanilag bonyolultabb probléma, amikor tudniillik egy dolog rejtett szerkezetét kell megkeresni ..." /K. Fülöp J. - Joó A. 1977. 2.o./

Az esetünkben elvégzendő feladat elsősorban a 2. módszer alkalmazását követeli meg, a kombinatorika mint objektivált tudás rejtett szerkezetét kell feltárni.

A struktúra fogalmát, feltárásának módszereit tovább finomíthatjuk annak figyelembevételével, hogy ugyanannak a

rendszernek általában többféle strukturájáról beszélhetünk. A rendszerelméletben szokás a dinamikus struktura, működési struktura, funkcionális struktura fogalmának megkülönböztetése.

Hajnal A. /1973/ a rendszerek háromféle strukturáinak, a taxonómiai strukturáknak, a statikus viszonystrukturáknak és a dinamikus viszonystrukturáknak a feltárását javasolja.

A pedagógiai elemzésekben a taxonómiai és a logikai strukturák feltárásának vannak hagyományai. Számunkra a további elemzésekhez elegendő lesz e kétféle strukturatípus megkülönböztetése, hagyományos értelmezésük kevés kiegészítésével.

A taxonomikus strukturák feltárása a rendszer elemeinek, részeinek a számbavételét, a besorolását, osztályozását jelenti. A taxonomikus strukturák megállapítása a rendszer megismerésének csak a legkezdetlegesebb foka, mivel a részeket, elemeket valódi, belső, lényegi összefüggésrendszerükből kiszakítva formálisan csoportosítja, és éppen a rendszer legfontosabb vonásainak, rendszerjellegének visszatükrözésére nem alkalmas. A taxonomikus strukturák táblázatokkal, fával, irányítatlan gráfokkal ábrázolhatók.

A logikai struktura fogalma a működési struktura, dinamikus viszonystruktura, funkcionális struktura fogalmakhoz áll közel. A rendszer belső, lényegi összefüggéseinek, a részek funkcionális kapcsolatainak a feltárását jelenti.

Egy rendszerhez általában több taxonomikus és logikai struktura tartozhat, és a jó rendszerképhez hozzátartozik valamennyi, vagy legalábbis az elemzés szempontjából fontosabbak feltárása.

A következőkben a rendelkezésre álló könyvek elemzésével, taxonómiai strukturáik megállapításával összegyűjtöm a kombinatorika elemeit, majd a közöttük levő lényeges kapcsolatok elemzése alapján megkísérelem a logikai strukturák feltárását. Természetesen nem a teljes kombinatorika, hanem csak az alapismeretek szűkebb körének az elemzésére vállalkozom, és a strukturák közül is elsősorban azokkal foglalkozom, amelyeknek a kombinatív képességgel kapcsolatban jelentőségük van.

### Taxonómiai strukturák

Az elemzés kiindulásaként szükség van annak tisztázására, melyek a kombinatorika alapelemei, alapismeretei.

Általában rendkívül nehéz elméleti elemzéssel eldönteni, mik tartoznak egy tudományág alapfogalmai, alapismeretei közé. Ennek egyik oka az, hogy a tudomány fejlődése során gyakran megtörténik az ismeretek átstrukturálódása. A hosszú ideig alapvetőnek tartott ismeretek részletkérdéssé válnak, míg addig speciálisnak tartott területekről kiderül, hogy a tudományág legáltalánosabb alapjaival foglalkoznak.

A matematika ismeretrendszere napjainkban megy át egy ilyen átstrukturálódáson, aminek egyik jellemzője az, hogy éppen a kombinatorika egy része, ami eddig speciális területnek, felsőfoku matematikának számított, az elemi matematikai ismeretek részévé válik.

A kombinatorikával kapcsolatban az is nehezíti az elemzést, hogy az utolsó harminc évben felhalmozódott ismeretek a sokszorosát teszik ki mindannak, ami a megelőző évszázadokban a kombinatorikában született.



Ezért a kombinatorikában ma még általánosan elterjedt felosztást követem, és az alapelemeket egy egészen egyszerű gyakorlati szempont alapján különitem el, azt tekintve alapismeretnek, amit az alap-, közép-, valamint felsőfoku tankönyvek, feladatgyűjtemények, illetve a nem speciális tárgyú kombinatorika könyvek tartalmaznak, alapismeretként tárgyalnak.

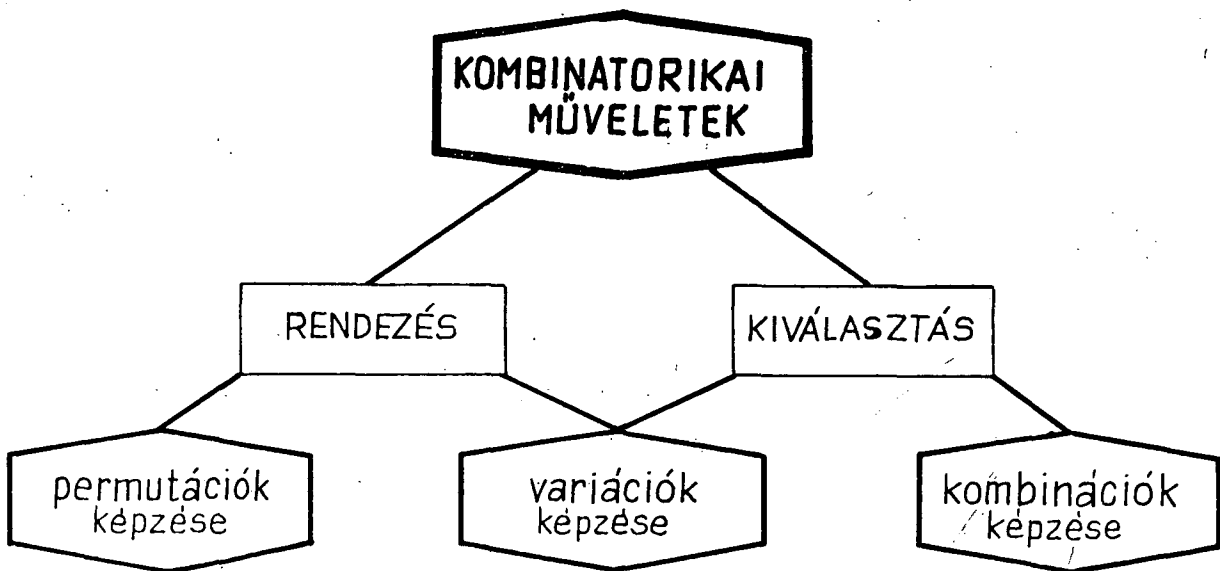
A kombinatorikát a felsőfoku tankönyvek hagyományosan az algebra és számelmélet keretében fejtik ki, és a valószínűségszámítással foglalkozó művek tartalmaznak rövid kombinatorikai bevezetőt. A legtöbb könyv a kombinatorikából csak egy szűk tárgykört, az ismétlés nélküli és ismétléses permutációk, variációk és kombinációk számának megállapításával kapcsolatos kérdéseket tárgyal.

A permutációk, kombinációk, variációk egyaránt halmazok elemeiből képezett valamilyen összeállítások: sorozatok, részhalmazok, vagy elemrendszerek. A következőkben ezek, valamint valóságos dolgok hasonló összeállításainak a közös megnevezésére a kombinatorikai konstrukciók, vagy egyszerűen csak a konstrukciók kifejezést fogom használni. A matematikában használatos még a kombinatorikai komplexió illetve a kombinatorikus struktúra megnevezés is, mivel azonban a struktúra fogalmát más értelemben használom, itt szerencsésebb a konstrukció kifejezés alkalmazása. /Valóságos dolgoknak pedig olyan összeállításairól lesz szó, amelyek a kombinatív képesség működésének, valamilyen "konstruálás"-nak az eredményei./

A permutációk képzését, a variációk képzését, a kombi-

nációk képzését, valamint az egyéb kombinatorikai konstrukciók képzésére szolgáló eljárásokat pedig kombinatorikai műveleteknek nevezem, megjegyezve, hogy itt nem az algebrában definiált műveletfogalomról van szó.

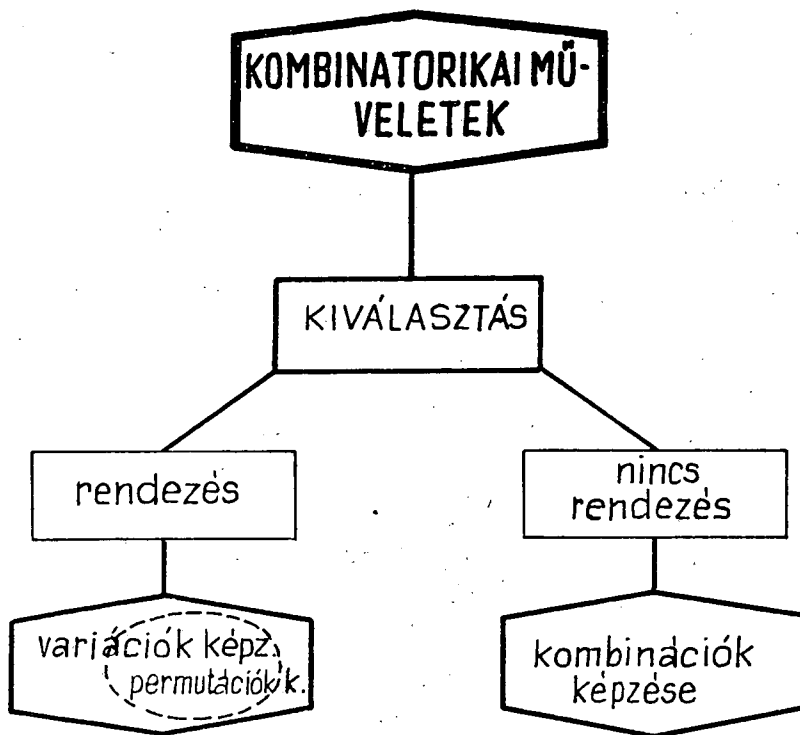
A legtöbb felsőfokú tankönyv /Fuchs L. 1963., Szele T. 1970., Denkinger G. 1968., Gáspár Gy. 1968., Gyapjas F. 1972., Bácskai Z. 1971./ a kombinatorikát a kiválasztással és a rendezéssel hozza kapcsolatba, a permutációk, variációk, kombinációk képzését a kiválasztás és a rendezés alkalmazásaként vezeti be. Az alapismeretek ilyen elrendezése az 1. ábrán látható sémának felel meg.



1. ábra

Egy másik felfogás szerint a permutációk képzése a vari-

ációk képzésének speciális eseteként tekinthető /Vilenkin, N.J. 1971., Matematikai kisenciklopédia 1968./, így elegendő a variációk és a kombinációk bevezetése. Ha a kombinatorikai műveleteket ez esetben is a kiválasztás és a rendezés alkalmazásaként akarjuk értelmezni, a kiválasztás megelőzi a rendezést /2. ábra/.



2. ábra

Ez utóbbi felfogással egyezik meg az Amerikában használatos csoportosítás is, azzal a terminológiai különbséggel, hogy ott az általunk variációknak nevezett sorozatokat permutációknak nevezik /Ryser, H.J. 1963., Varga T. 1967./. Így tehát csak a variációkat /ahogy ott nevezik: permutációk/ és a kombinációkat vezetik be, ezeken belül értelmeznek ismétlés nélküli és ismétlődéses eseteket /3. ábra, forrás: Varga 1967./.

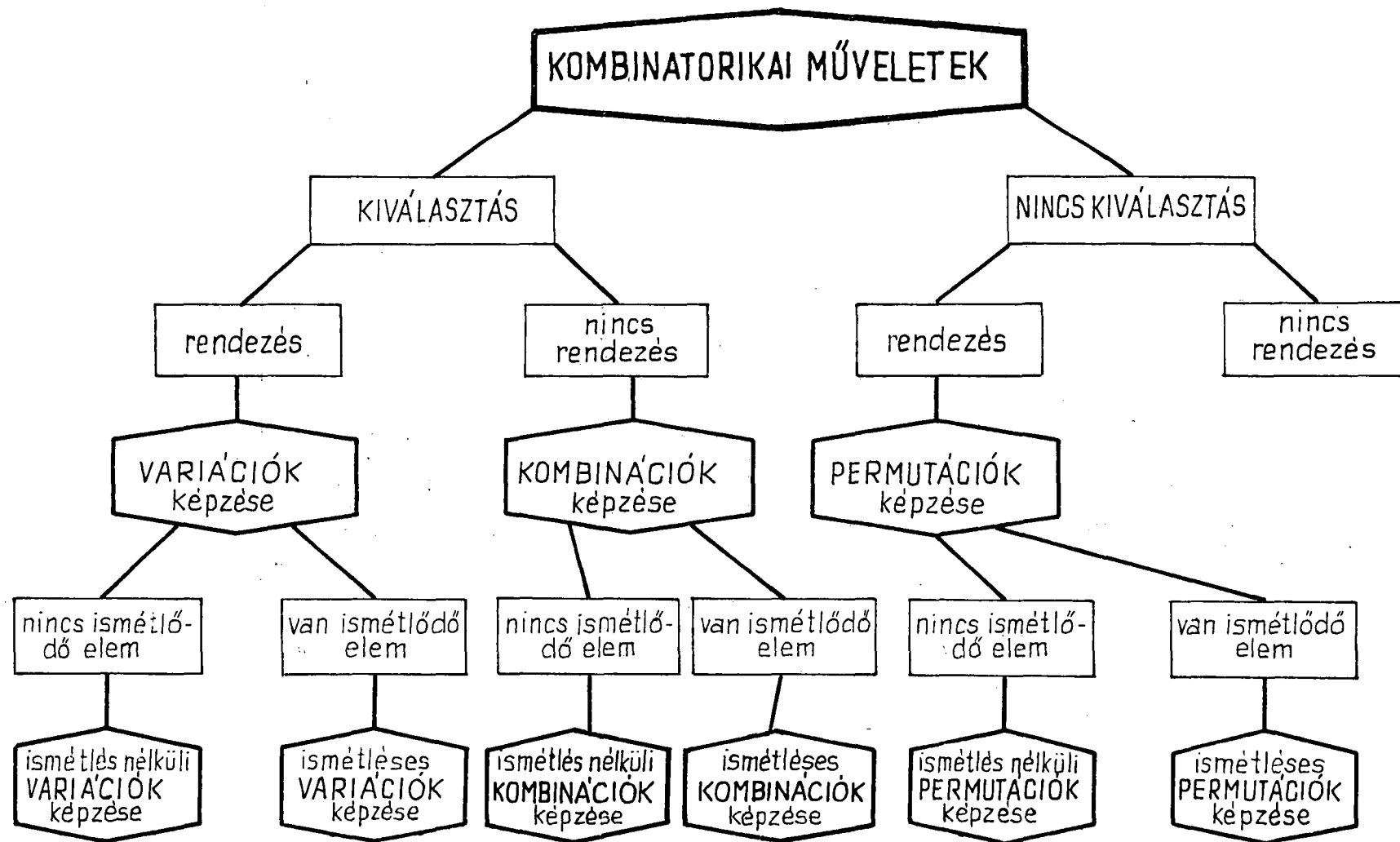
Ha ezeket a felosztásokat, amelyek közül némelyiket a

ISMÉTLÉS	<b>PERMUTÁCIÓK</b>	ISMÉTLÉS NÉLKÜLI
ISMÉTLÉS	<b>KOMBINÁCIÓK</b>	ISMÉTLÉS NÉLKÜLI

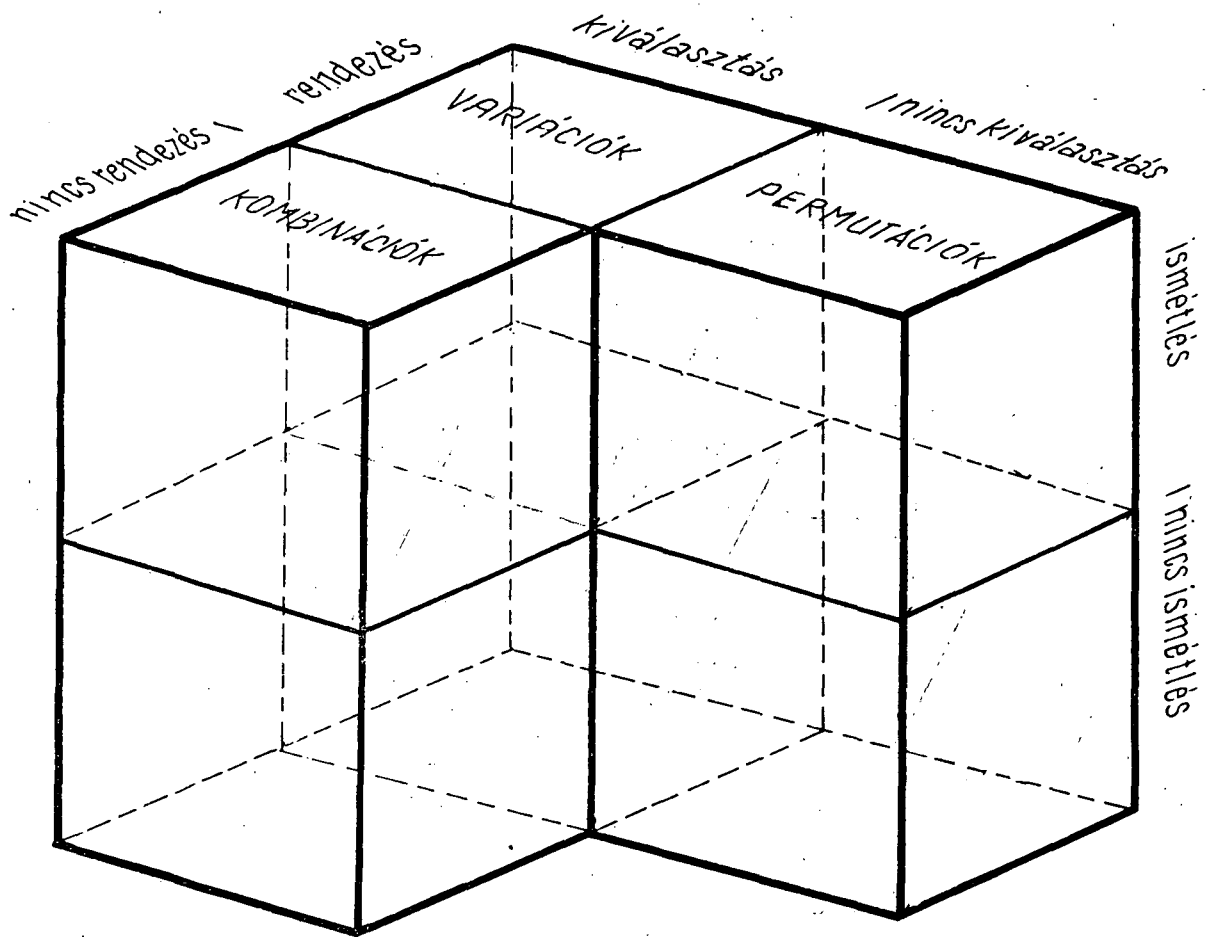
3. ábra

könyv kifejezetten megad, másoknál pedig csak az ismeretek elrendezésében nyilvánul meg/ összefoglaljuk, a három formális felosztási alap - a kiválasztás, a rendezés és az ismétlődés - alkalmazásával a kombinatorikai műveletek hagyományos csoportosítását kapjuk /4. ábra/, amit, hogy az alapok hierarchizálását kiküszöböljük, szemléltethetünk a taxonomikus strukturák szokásos ábrázolásával /5. ábra/.

Könnyen kimutatható, hogy ez a formális csoportosítás nem tükrözi a kombinatorikai műveletek belső összefüggéseit, származtatásuk természetes rendjét. Nem felel meg a matematikai szempontoknak, mivel nem fejeződik ki benne a sorozatok, a részhalmazok, az elemrendszerek különbözősége, az ismétlődés eltérő jellege. De nem fejezi ki a konstrukciók tényleges előállításának, felsorolásának strukturáját sem. Olyan műveleteket sorol egy csoportba, amelyek között nincs logikai kapcsolat, míg az azonos jellegűeket elszakítja egymástól./pl.: az ismétléses permutációk kevésbé függenek össze



4. ábra



5. ábra

akár az ismétléses variációkkal, akár az ismétlés nélküli permutációkkal, mint az ismétlés nélküli kombinációkkal/.

Tankönyvek esetében az ismeretek elrendezése, tárgyalás-módja nem különbözik, mivel - mint arra Skemp /1975./ is felhívja a figyelmet - meghatározza a kialakuló szkémák alkalmazhatóságát, továbbfejleszthetőségét. A korszerűbb szemléletű munkák /ezekre a logikai strukturáknál fogok hivatkozni/ más csoportosításban tárgyalják a kombinatorikai műveleteket, az itt elemzett könyvek többségénél azonban az ismeretek elrendezése ezt az egyszerű taxonomiai strukturát követi. Kevés tesz közülük

említést egyéb kombinatorikai feladatokról, az elemi kombinatorikai problémák gazdagságáról.

Az elemi kombinatorika további feladatai annyira változatosak, hogy azokat nemcsak csoportosítani, de még közülük bizonyos típusokat kiragadni is nehéz.

Egyik ilyen típusnak tekinthetjük az egyszerű összeszámlálási feladatokat. /Különösen alapfoku könyvekben, feladatgyűjteményekben fordulnak elő, pl.: Varga T. 1967, Czapáry E. 1974, Pelle B. 1978, Kunstárné 1977, Lovász-Vesztergombi - Pelikán 1970./ Ezek során nem kell kombinatorikai konstrukciókat létrehozni, csak megszámolni bizonyos lehetőségeket. E típus jellemzője a szavaknak betűmátrixokból történő kiolvasásait megszámoló feladat, vagy a Pascal háromszögekkel kapcsolatos számítások.

Másik összeszámlálási feladat a logikai szita formula /vagy az általánosabb tartalmazás-kizárás elvének/ alkalmazása, ami szintén nem igényli kombinatorikai konstrukciók előállítását /Vilenkin 1971, Tomescu 1978./. Itt a számítási eljárás, a matematikai formalizmus dominál a kombinatív jelleggel szemben.

Közelebb állnak előzőekben felsorolt kombinatorikai műveletekhez azok a feladatok, amelyekben bizonyos konstrukciókat kell létrehozni, és ezek közül néhány a feladat feltételei szerint ekvivalensnek számít. Jellemző példák erre az asztal körüli ültetések vagy a gyöngyfüzés feladatai, amikor az egymásból ciklikus permutálással vagy tükrözéssel előálítható esetek számitanak azonosnak.

Igen általános az a feladat, amikor több halmaz elemei-

ből kell sorozatokat képezni. Ilyenkor a konstrukció adott helyén csak a megfelelő halmaz elemei állhatnak. /A halmazok Descartes-féle szorzata képzésének megfelelő művelet./

Az előző műveletekből származtathatók az olyan feladatok, amelyekben megadott feltételek bizonyos konstrukciókat kizárnak. /Példa erre a zászlószínezés./ Sok feladat a hagyományos kombinatorikai műveletek közül többnek az együttes vagy egynek a többszöri alkalmazásával oldható meg. Ezek közül kevésnek van triviális neve, de ilyen például a halmaz részhalmazainak képzése, vagyis az összes lehetséges elemszámú kombináció előállítása.

Van a kombinatorikai feladatoknak egy olyan köre, amelyik igen egyszerű elemi problémákból indul ki, a létrehozandó konstrukciók nem bonyolultabbak, mint amelyeket a hagyományos kombinatorikai műveletekkel előállíthatunk, általános megoldásuk azonban mégis komoly matematikai eszközöket igényel. Az egyszerűbb konkrét esetek azonban a kombinatorikai műveletek együttes alkalmazásával néha ezeknél is megoldhatók. Ilyen például  $n$  számú tárgynak  $m$  számú rendezett cellába való elrendezése.

Halmaz adott számú osztályt tartalmazó osztályozásainak előállítása is viszonylag egyszerű probléma, azonban az osztályozások számának megadása általános esetre csak rekurzióval lehetséges. Ugyanez elmondható egész szám egész számok összegeként való előállításainak számáról. /Tomescu 1978. 15., 46. ill. 60.o./



### Logikai strukturák

Az előzőekben megfogalmazott értelmezés szerint a logikai strukturák feltárása a kombinatorikai műveletek belső szerkezetének, lényeges, funkcionális kapcsolatainak az elemzését jelenti.

A kombinatorikában két elvileg különböző típusu probléma vethető fel: adott feltételeket kielégítő konstrukciók számának meghatározása és maguknak a konstrukcióknak az előállítása, felsorolása. A kombinatorikai műveleteket tehát e kétféle típusu feladattal kapcsolatban kell megvizsgálni.

A matematikában a nagyobb hangsúly a lehetőségek számának megállapítására esik, foglalkozzunk először ezzel a feladatkörrel.

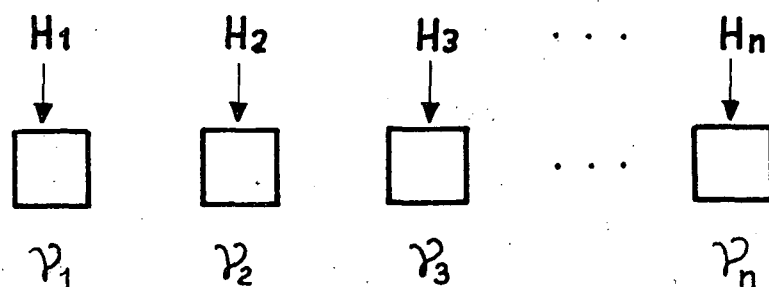
Ha kombinatorikai műveletnek a különböző konstrukciók képzését, előállítását tekintjük, mostani elemzésünkben kizárhatjuk azokat az összeszámlálásokat, számítási eljárásokat, amelyek nem konstrukciók lehetséges előállításával kapcsolatosak.

Igy a legegyszerűbb kombinatorikai számításnak a lehetőségek szorzását tekinthetjük. A szorzási szabály szerint ha egyik típusu dologból  $n$  darab, egy másik típusu dologból  $m$  darab van, a két különböző típusu dolog egyesítésével  $m \cdot n$  féle konstrukciót lehet létrehozni.

Az így történő konstrukcióképzés általánosításával a hatványományos kombinatorikai műveletekhez képest új műveletet értelmezhetünk a következő módon.

Legyen adott az egymástól megkülönböztetett  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots$ ,

$\mathcal{V}_k$  cella és a  $H_1, H_2, \dots, H_k$  halmaz, amelyek rendre  $n_1, n_2, \dots, n_k$  elemet tartalmaznak. A  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$  cella rendre  $H_1, H_2, \dots, H_k$  elemeivel tölthető be úgy, hogy minden cella egy és csak egy elemet tartalmazzon /6. ábra/.



6. ábra

A szorzási szabály szerint így  $n_1 n_2 \dots n_k$  számú különböző konstrukciót állíthatunk elő.

Az így értelmezett kombinatorikai művelet valójában halmazok Descartes-féle szorzatának képzését jelenti, ezért a továbbiakban e műveletre ezt a megnevezést fogom használni.

A Descartes-féle szorzat képzésétől az ismétléses variációk, az ismétlés nélküli variációk és az ismétlés nélküli permutációk képzése csak a cellák betöltésére felhasználható halmazokban különbözik.

Az ismétléses variációk képzése a Descartes-féle szorzat képzésének speciális eseteként is tekinthető. Ekkor

$H_1 = H_2 = \dots = H_n$ , vagyis a  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$  cellák mindegyike egy  $n$  elemű  $H$  halmaz elemeivel tölthető be. A lehetőségek száma így  $n^k$ .

Az ismétlés nélküli variációk képzésekor egy  $n$  elemű  $H$  halmaz minden eleme csak egyszer használható fel a  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$  cellák betöltésére. Így a  $\mathcal{V}_1$  cella a  $H$  halmazból  $n$ -féleképpen, a  $\mathcal{V}_2$  cella a megmaradt, minden egyes konstrukciónál más  $n-1$  elemű halmazból  $(n-1)$ -féleképpen, a  $\mathcal{V}_k$  cella a még fel nem használt elemekből  $(n-k+1)$  féle módon tölthető be. Így az összes lehetőség száma:  $n/n-1/\dots/n-k+1/$ .  $/n > k/$

Az ismétlés nélküli permutációkat akkor kapjuk, ha a cellák száma és a halmaz elemszáma megegyezik, így a permutációk száma  $n!$

A Descartes-féle szorzatok, az ismétlés nélküli permutációk, az ismétlés nélküli variációk és az ismétléses variációk képzése tehát közös csoportot alkot, a négy művelettel előállítható konstrukciók száma egyaránt a lehetőségek szorzásával számítható ki. Ilyen szempontból egyben a kombinatorikai műveletek legegyszerűbb csoportját is képviselik, mert a lehetséges konstrukciók száma a szorzás egyszeri alkalmazásával kiszámítható.

Az ismétléses variációk, az ismétlés nélküli variációk és az ismétlés nélküli permutációk képzése más, mélyebb matematikai értelmezés alapján is egy csoportba sorolható /Szendrei J. 1974., Tomescu, I. 1978./. Az  $n$  elemű  $X$  halmaz elemeiből  $e$  három művelettel készíthető  $m$  elemű sorozatok és az  $X$  halmazt az  $m$  elemű  $Y$  halmazba leképező  $f: X \rightarrow Y$  függvények között bijekció létesíthető. Ekkor:

az  $f: X \rightarrow Y$  függvények száma:  $m^n$  /ism. variációknak felelnek meg/;

az injektív  $f : X \rightarrow Y$  fgv.-k száma:  $m/m-1/\dots/m-k+1/$   
/ism. nélk. variációk/;

a bijektív  $f : X \rightarrow Y$  fgv.-k száma,  $n!$  /ism. nélk. permutációk/.

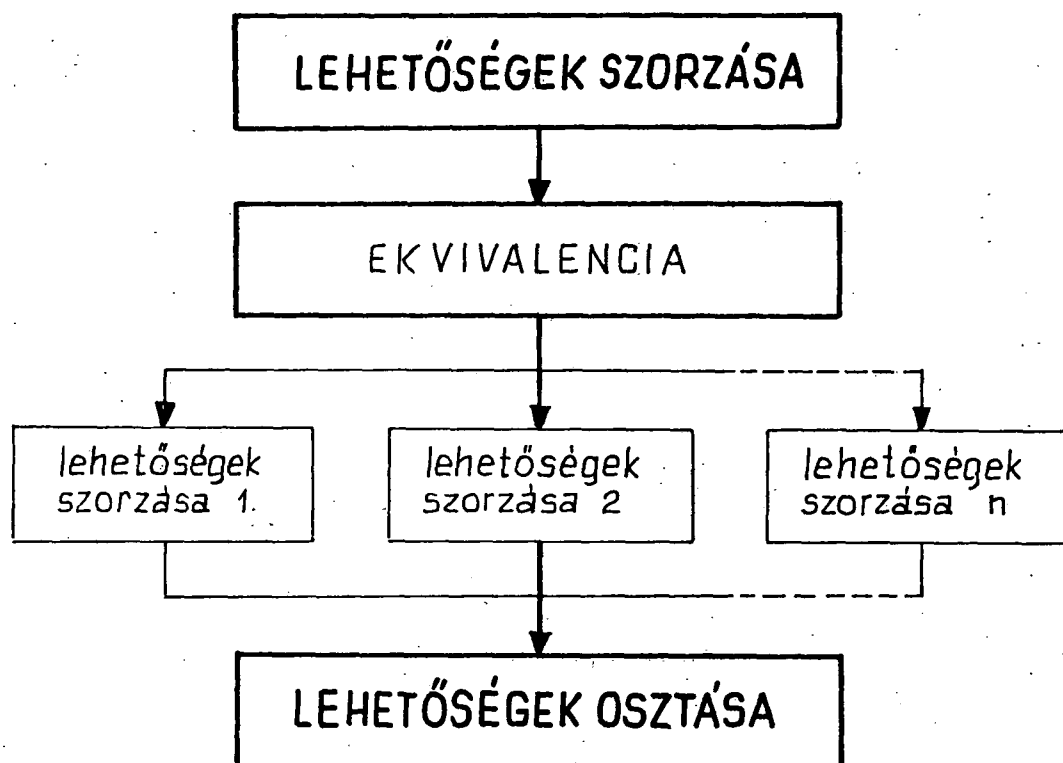
E matematikailag is összefüggő három műveletből álló csoportot itt az általuk előállított konstrukciók kiszámításának azonos módja alapján érdemes egy negyedikkel, a Descartes-féle szorzat képzéssel kiegészíteni.

A többi művelettel előállítható konstrukciók száma nem számítható ki egy lépésben a szorzási szabállyal.

Ezekben az esetekben úgy járunk el, hogy a lehetőségek szorzásával először a konstrukciók tágabb körének számát határozzuk meg, amelyek között a feladat feltételei szerint ekvivalensek is lesznek. A következő lépésként az ekvivalens lehetőségeket osztályokba rendezzük, majd meghatározzuk az egyes ekvivalenciaosztályokban levő konstrukciók számát. Ezután a lehetőségek osztásával a feladat feltételei szerint különböző konstrukciók számát állapítjuk meg. /E típusra példa:  $n$  különböző gyöngyből hány különböző zárt gyöngysort lehet készíteni, ha minden gyöngyöt egyszer és csak egyszer használunk fel./

E csoportba tartozik a hagyományos kombinatorikai műveletek közül az ismétléses permutációk és az ismétlés nélküli kombinációk képzése. Ezek esetében a képezhető konstrukciók száma a 7. ábrán látható séma szerint határozható meg.

Az ismétlés nélküli kombinációk és az ismétléses permutációk képzése más megközelítés szerint is közös csoportba sorolható: mindkét művelet véges halmaz rendezett osztályozásait állítja elő /Kemény-Snell-Thompson 1971/.



7. ábra

Az ismétléses permutációk képzése az általánosabb, az ismétlés nélküli kombinációk képzése az a speciális eset, amikor a halmazt csak két részre osztjuk. Hogy a lehetőségek kiszámításának szempontjai alapján is összetartoznak, és e szempont alapján még más műveletek is ebbe a csoportba sorolhatók, azt az 1. táblázat szemlélteti. /A "gyöngyfűzés" a példaként említett feladatot jelöli./

1. táblázat

művelet	lehetőségek szorzása	ekvivalencia	ekvivalens konstrukciók számának megállapítása	lehetőségek osztása
ism. permutáció képz.	Az összes elemet különbözőnek tekintjük, és kiszámítjuk a permutációk számát: $P_n$	Ekvivalensek azok a permutációk, amelyek csak az "ismétlődő" elemek sorrendjében különböznek.	$P_{k_1}, \dots, P_{k_i}$ kiszámítása	$\frac{P_n}{P_{k_1} \dots P_{k_i}}$
kombináció képz.	Az összes elemet különbözőnek tekintjük és kiszámoljuk a variációk számát: $V_n^k$	Ekvivalensek azok a konstrukciók, amelyek csak az elemek sorrendjében különböznek.	$P_k$ kiszámítása	$\frac{V_n^k}{P_k}$
"gyöngyfüzés" /sikban/	Kiszámítjuk az $n$ különböző elem permutációját: $P_n$	Ekvivalensek azok az esetek, amelyek egymásból ciklikus permutálással jönnek létre.	$P_{n,c} = n$	$\frac{P_n}{n}$

Az elemi kombinatorikai számítások harmadik csoportjába sorolhatjuk azokat az eljárásokat, amelyek az előbbi két típus valamelyikének vagy mindkettőnek a többszöri egymásutáni alkalmazásával oldhatók meg, vagy azokra visszavezethetők.

E típusból a gyakoribb kombinatorikai műveletek közül kettőt érdemes kiemelni.

Az ismétléses kombinációk számának megállapítása visszavezethető az ismétlés nélküli kombinációk kiszámítására

/így ezt a megoldást alkalmazza a legtöbb tankönyv/ vagy az ismétléses permutációk számának megállapítására, az előzőek értelmében mindkét megoldás ugyanarra a sémára vezet.

A másik példa  $n$  elemű halmaz összes részhalmazainak számbavétele lehet. Itt is több megoldás kínálkozik. A megfelelő kombinációk számának megállapításával kiszámítjuk a  $0, 1, 2, \dots, n$  elemet tartalmazó részhalmazok számát, és az így kapott számokat összegezzhetjük. Ugyanehhez az eredményhez eljuthatunk egyszerűbben is. A részhalmazoknak  $n$  hosszúságú bináris sorozatokat feleltethetünk meg, és így a feladatot ismétléses variációk számának megállapítására vezethetjük vissza.

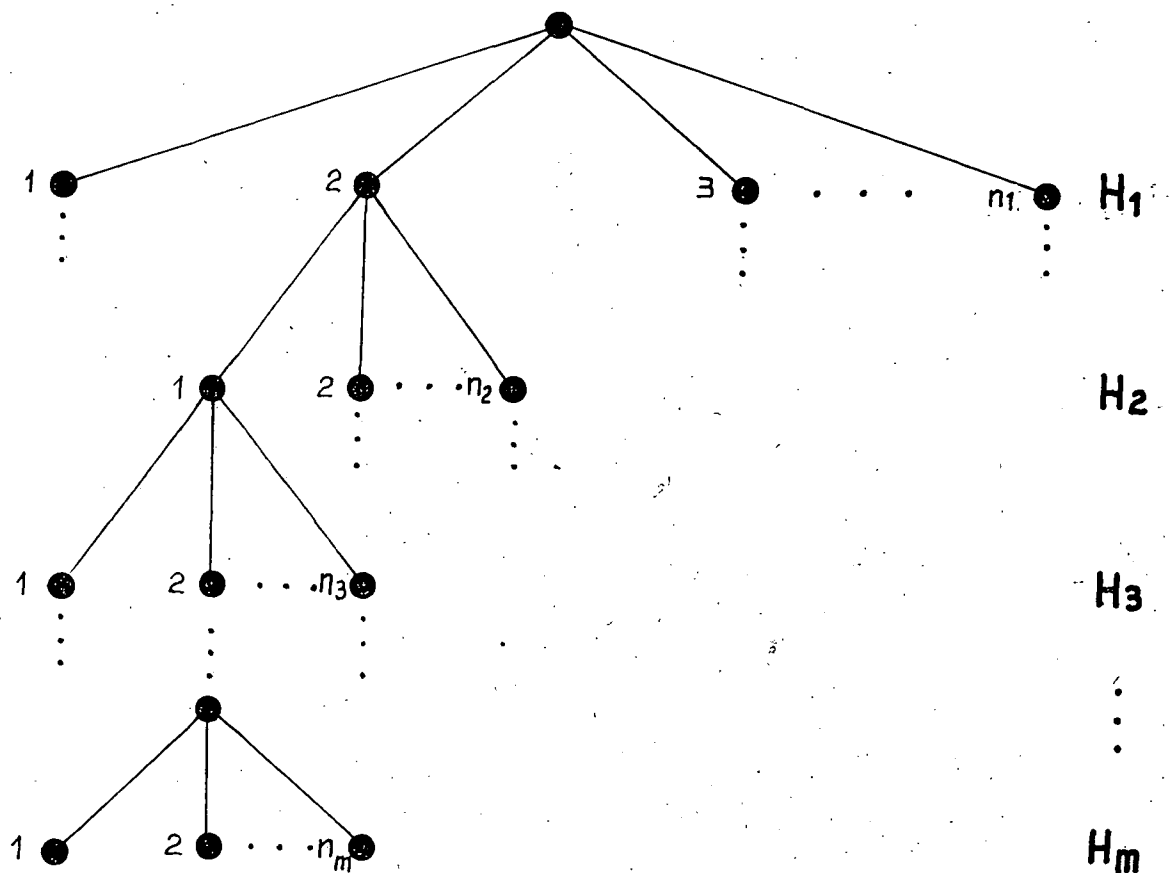
A kombinatorikára vizsgálata szempontjából nagyobb jelentősége van a kombinatorikában kisebb hangsúlyt kapó témakörnek, a kombinatorikai konstrukciók képzésével, felsorolásával kapcsolatos kérdéseknek.

Egy kombinatorikai művelettel képezhető összes konstrukció felsorolása egyben a konstrukciók rendszerezését is megköveteli. Csak a rendszerezés biztosítja, hogy ne képezzük többször ugyanazt a konstrukciót és valóban minden konstrukciót előállítsunk.

A konstrukciók előállításának, felsorolásának bonyolultsága szerint a kombinatorikára műveleteket ugyanúgy három csoportba sorolhatjuk, mint ahogy azt a konstrukciók számának megállapításával kapcsolatban tettük.

A legegyszerűbben az ismétléses variációkat, az ismétlés nélküli variációkat, az ismétlés nélküli permutációkat és a Descartes-szorzatnak megfelelő konstrukciókat képezhet-

jük, ezek rendszerezését egyaránt fa alakú gráffal szemléltethetjük. A konstrukciók ez esetben a fa utjainak felelnek meg. /8. ábra/



8. ábra

A fa szintjeihez ugyanugy rendelhetünk halmazokat, mint ahogy a cellákhoz rendeltünk a lehetőségek kiszámításával kapcsolatban. A fa csucsaiból kiinduló élek száma a Descartesszorzatok képzésénél emeletről emeletre tetszőlegesen változhat, az ismétléses variációknál állandó, az ismétlés nélküli variációknál és permutációknál pedig a fa gyökerétől a felső szintek felé haladva szintenként eggyel csökken.

Fa segítségével olyan feladatok is megoldhatók, amelyekben különböző kikötések a konstrukciók bizonyos körét eleve

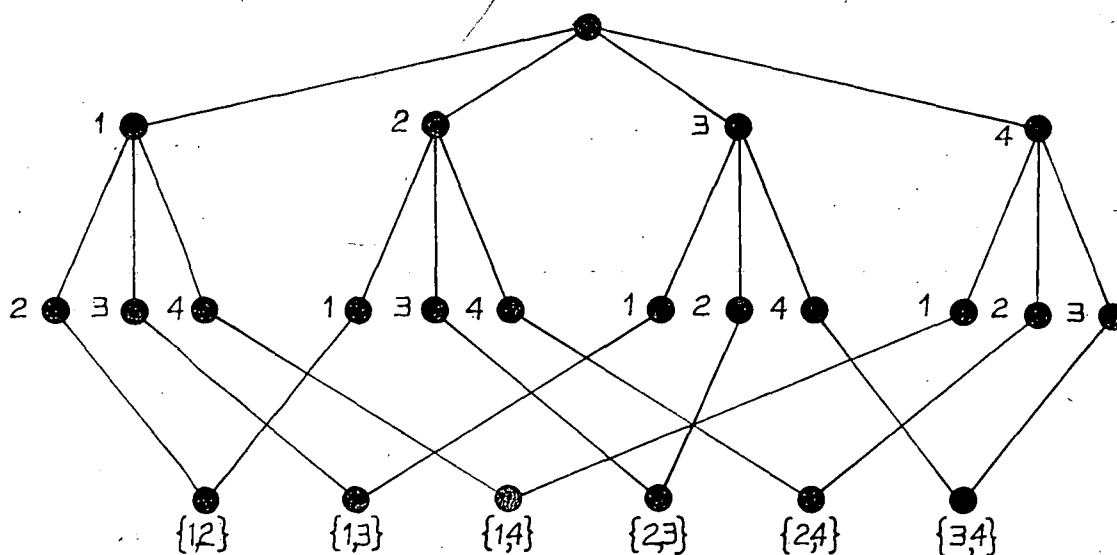


kizárják. Ilyenkor a fa azonos szintjén levő csucsokból kiinduló élek száma is különbözhet.

A következő csoportba tartozó műveletek közös vonása az, hogy a konstrukciókat nem egyetlen lépésben képezzük, hanem először fa-rendezéssel előállítjuk a konstrukciók tágabb körét, majd ezeket osztályozzuk.

Igy képezhetjük az ismétléses permutációkat, az ismétlés nélküli kombinációkat /illetve ez az egyik módja az ismétlés nélküli kombinációk képzésének, a kombinációképzés másik lehetőségére később fogok visszatérni/, és ezt a módszert követhetjük sok, triviális névvel nem jelölt feladat esetében is, például a korábban említett "gyöngyfűzés" típusú feladatoknál.

Kombinációképzés során először fa alakú gráffal variációkat állítunk elő, majd az egymásból permutálással származtatható eseteket ekvivalenciaosztályokba soroljuk. /Négy különböző elem másodosztályú kombinációnak képzését a 9. ábra szemlélteti./



9. ábra

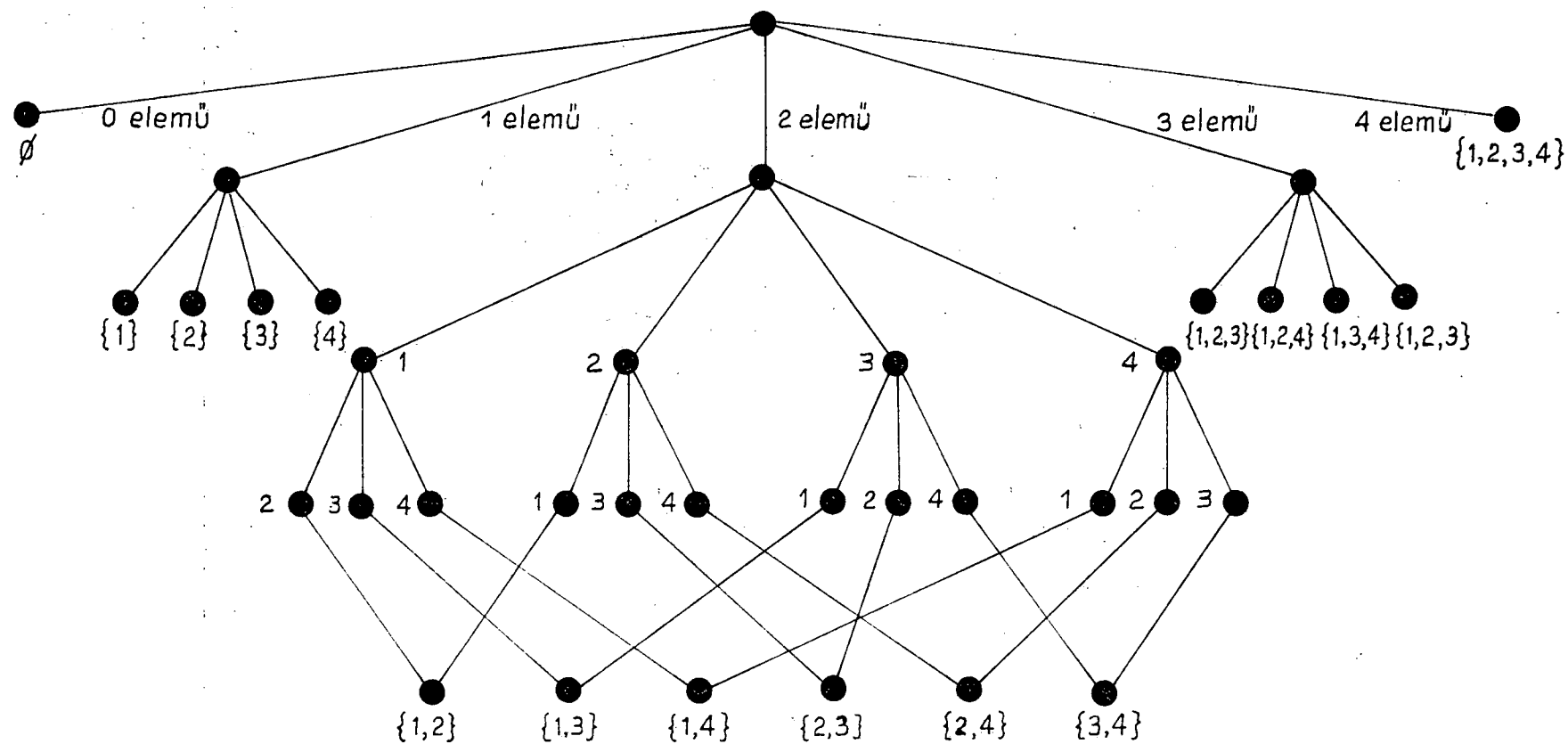
Az osztályozás általában egyszerűsíthető, ha meg lehet adni olyan kritériumot, ami minden osztályban csak egy konstrukcióra érvényes. Például kombinációképzés esetében megállapodhatunk abban, hogy csak azokat a variációkat soroljuk fel, amelyekben az elemek növekvő sorrendben szerepelnek. Azonban ilyenkor is elő kell állítanunk minden variációt, hogy a növekvő sorrendű eseteket kiválaszthassuk, tehát lényegében ez az eljárás sem különbözik az osztályozástól.

A kombinatorikai konstrukciók előállításának harmadik csoportjába sorolhatjuk az előző két típusnál bonyolultabb eljárásokat. Ezeknek az eljárásoknak egy része az előző két típusból építhető fel, vagyis a fa rendezés és az osztályozás többszöri alkalmazását igényli.

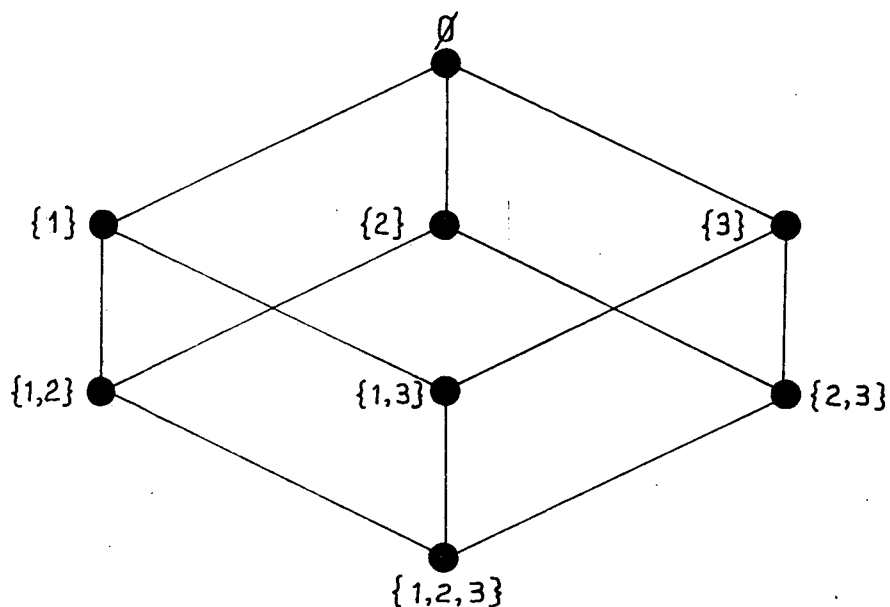
Erre példaként halmaz részhalmazainak képzését tekinthetjük. Halmaz részhalmazait képezhetjük úgy, hogy sorban előállítjuk a nullad, első, másod, ...,  $n$ -ed osztályu kombinációkat. Ezt az előállítási módot 4 elemű halmazra a 10. ábra szemlélteti.

Halmaz részhalmazait azonban más eljárással is képezhetjük. Erre az újabb eljárásra példaként nézzük meg először a háromelemű halmaz részhalmazainak képzését. A kételemű részhalmazokat az elemek mint egyelemű részhalmazok páronkénti egyesítésével állíthatjuk elő. A kételemű részhalmazok egyesítésével kapjuk a háromelemű halmazt. Az így kapott részhalmazokat az üres halmazzal kiegészítve kapjuk az összes részhalmazt /11. ábra/. Az ábra azt is szemlélteti, hogy a halmaz összes részhalmaza hálót alkot.

# 4 ELEMŰ HALMAZ RÉSZHALMAZAINAK KÉPZÉSE



10. ábra



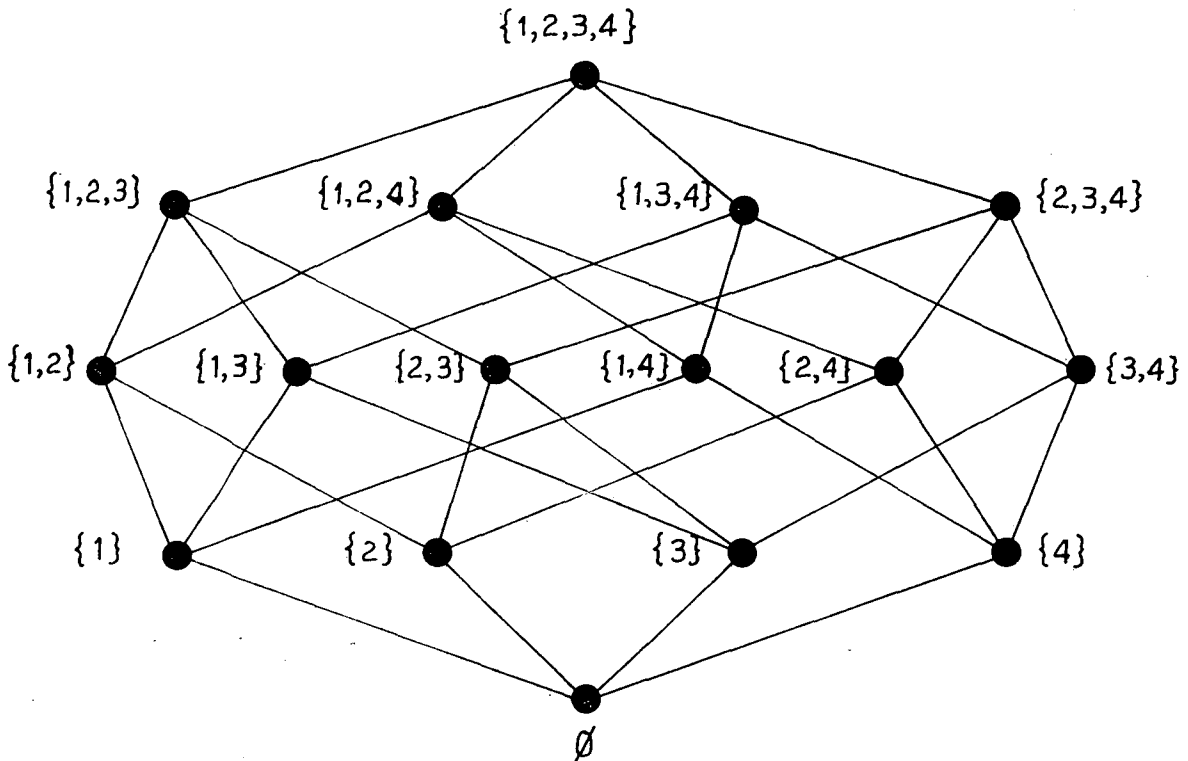
11. ábra

A háló kétműveletes algebrai struktúra, két művelete: az egyesítés és a metszés.

Az előző példánál az egyesítés műveletét használtuk fel, azonban a részhalmazokat képezhetjük a metszés műveletével is. Ekkor a háló másik "végén" kell elindulnunk. Erre példaként képezzük 4 elemű halmaz részhalmazait, /12. ábra./ A három elemű részhalmazokat úgy állíthatjuk elő, hogy a halmaz egy-egy elemét kihagyjuk a négyelemű részhalmazból. A négy háromelemű részhalmazból páronként metszetet képezve kapjuk a hat kételemű részhalmazt. Hasonlóan kaphatjuk az egyelemű részhalmazokat, melyeknek páronkénti metszete az üres halmaz.

A háló magában foglalja a kombinációkat, így ez az eljárás a kombinációk képzésére is alkalmas.

Bár szigorubb értelemben nem matematikai kérdés, mégis itt célszerű kitérni a konstrukciók különböző előállítási



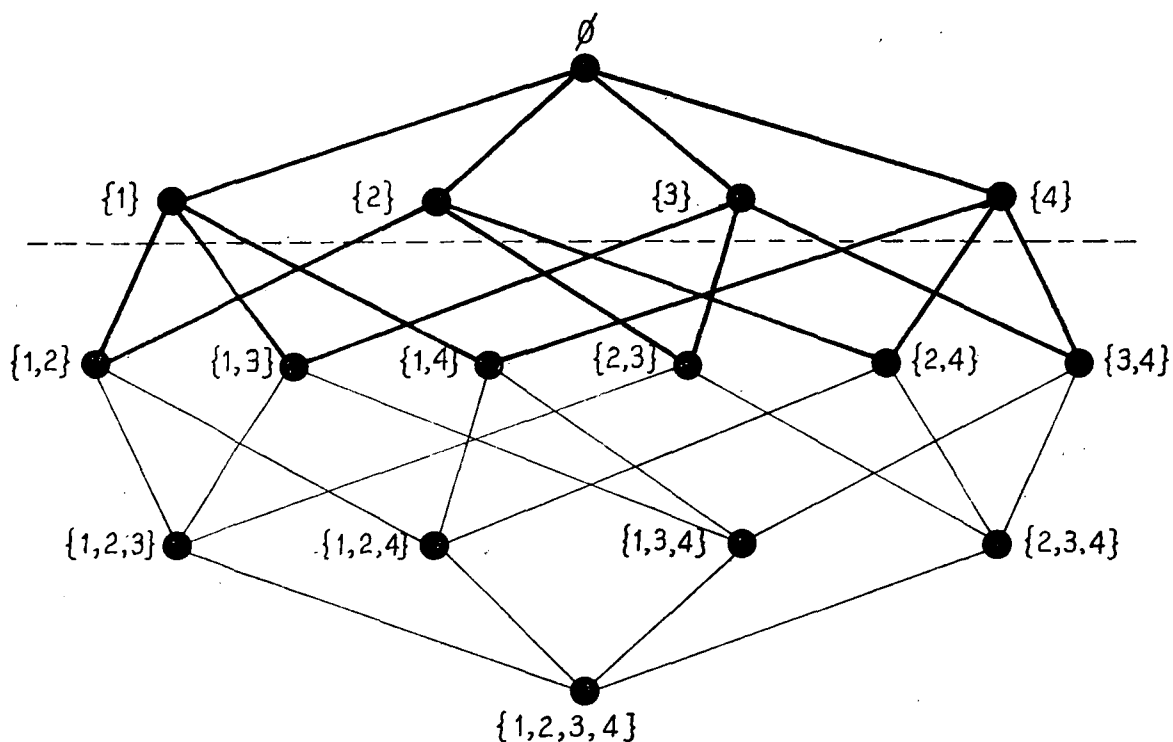
12. ábra

módjainak összehasonlítására.

A kombinációknak a háló strukturába rendezése csak kevés elem esetén jelent egyszerűsödést a fa és az ekvivalencia segítségével történő előállításához képest. Négy elemű halmaznál például még áttekinthető, hogy mely részhalmazokból kell metszetet készíteni. Ennél több elemre azonban már a megfelelő részhalmazok kiválasztása tulajdonképpen kombinációk rendszeres képzését követeli meg.

A kombinatorikus műveletek kialakulásának és rendszerre szerveződésének szempontjából figyelemre méltó az a lehetőség, amit a háló struktúra segítségével történő kombinációképzés valamint a fa és az ekvivalencia segítségével való konstrukcióképzés gráfjainak összehasonlítása alapján vehetünk fel.

Összehasonlítva a kombinációképzés korábban elemzett módszerével, megállapíthatjuk, hogy a háló strukturát reprezentáló gráf magában foglalja a fa rendezéssel és osztályozással való kombinációképzést is. Ezt részletesen mutatja a 13. ábrán látható háló és a 9. ábra összehasonlítása."



13. ábra

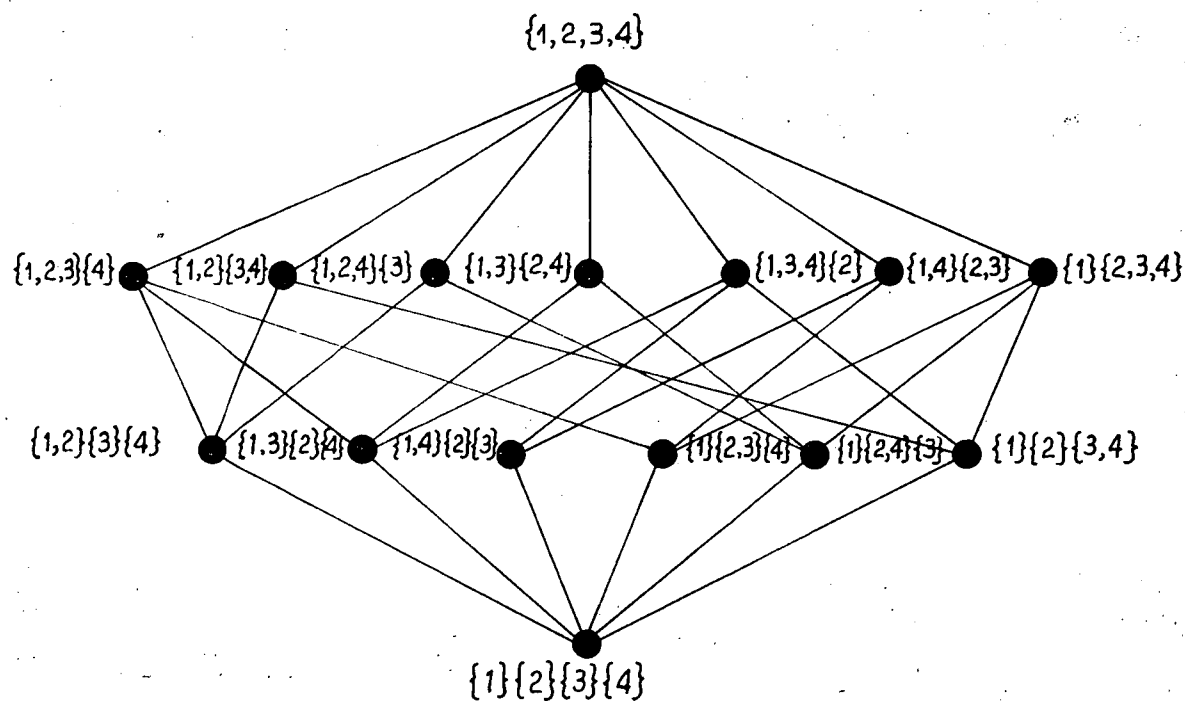
A 13. ábra /egyébként a 12. ábra megfordítása/ részhalmazok egyesítésével történő kombinációképzést szemlélteti. Ha a 13. ábrán vastag vonallal jelölt részgráfot a szaggatott vonal mentén gondolatban két részre osztjuk, pontosan a 9. ábrán látható gráfot kapjuk. A részgráf szaggatott vonal felett levő része a fa alaku gráfnak, az alatta levő az osztályozásnak feleltethető meg. A hálót reprezentáló gráf így - a képesség működésével kapcsolatban - a fa és ekvivalencia segítségével történő kombinációképzés utjainak lerövidülése-

iként is értelmezhető.

Az egyesítéssel történő részhalmazképzés így nem tekinthető az előző képzési eljárásokhoz képest teljesen újnak, sokkal inkább azok sajátosságos egybeépülésének. Ez az egybeépülés azonban különbözik a részek mechanikus összerakásától, amint azt a 10. és a 13. ábra összehasonlítása is szemléltethet.

Ezeket a formális összefüggéseket azonban csak lehetőségeknak tekinthetjük, szempontoknak, amelyeket a képesség kialakulásának empirikus vizsgálatában érvényesíthetünk.

Adott halmaz összes osztályozásai szintén hálót alkotnak. A négy elemű halmaz osztályozásainak hálóját a 14. ábra szemlélteti.



14. ábra

A háló struktúra itt is segíthet az összes lehetőség képzésében, rendszerbe foglalásában. Az osztályozásokat az előzőekben elemzett műveletek kombinált alkalmazásával konkrét esetekben elő lehet állítani, az általános képzési szabály viszont már sokkal bonyolultabb.

## II.

A KOMBINATIV KÉPESSÉG MINT PSZICHIKUS RENDSZER1. A KÉPESSÉG MINT PSZICHIKUS RENDSZER

A kombinatív képesség alaposabb megismeréséhez, mibenlétének tisztázásához, a gondolkodásban betöltött szerepének a vizsgálatához szükséges, hogy kiindulásként tisztázzuk, mit értünk képességen, vagyis körülhatároljuk a képességnek azt a felfogását, amit a további elemzések során használni fogunk.

A képesség mind a pedagógiában mind a pszichológiában az alapvető kategóriák közé tartozik. Ennek ellenére - vagy talán éppen ezért - a képesség fogalmának meghatározása korántsem egyértelmű.

A pedagógiai és pszichológiai irodalomban a "képesség" szó meglehetősen sokféle jelentéssel, vagy legalábbis jelentésárnyalattal fordul elő, a köznyelvben elfogadott tartalom hordozójaként és többé-kevésbé meghatározott terminus technikusként egyaránt szerepel. A képesség fogalmának meghatározásai többnyire az általánosság szintjén mozognak, ami talán tükrözi azt is, hogy a képességekről, a képességek mibenlétéről ma még kevés konkrét ismeretünk van és a rendelkezésre álló ismeretek sem kovácsolódtak egységes rendszerré.



A képesség általános fogalmának meghatározása nem cé-  
lom, itt csupán arra vállalkozhatom, hogy az általánosan el-  
fogadott képesség-meghatározások keretébe beillesszem és kö-  
rülírjam a képességeknek azt a felfogását, ami a kombinatív  
képesség elemzéséhez alkalmas elméleti alapot biztosít.

Kiindulásként tekintsük a Pedagógiai Lexikon megfogalma-  
zását:

"képesség: valamely cselekvésre, teljesítményre való alkal-  
masság, illetve ennek mértéke; tehetség. Minőségét, fokát  
részben az emberrel vele született adottságok, hajlamok,  
részben a környezeti hatások együttesének befolyására szer-  
zett tapasztalatok /ismeretek, készségek/ határozzák meg.  
Az emberrel vele született adottságokból, hajlamokból álló  
rátermettség tehát a képesség fejlesztésének természetes  
feltétele, maga a képesség az emberi tevékenység folyamán  
alakul ki. Vannak általánosanak mondott képességek /pl. in-  
telligencia, kreativitás/, melyek a tevékenységformák szé-  
les körében jutnak kifejezésre, és vannak többé-kevésbé  
különleges képességek /pl. kézügyesség, zenei képesség,  
élénk, képszerű fantázia, képességek egyes sportágakban  
eredmények elérésére stb./. Valamilyen irányu képessége  
mindenkinek van, ennek feltárása azonban nem egyszerű, mi-  
vel mint belső lehetőség rejtett, és csak valamilyen telje-  
sítmény után nyilvánul meg. A teljesítményt viszont sok e-  
gyéb tényező /szorgalom, érdeklődés, állhatatosság, fáradé-  
konyság, a szorongás mértéke stb./ befolyásolja. Az átörök-  
lés és a környezeti hatások viszonyának vizsgálata inter-  
diszciplináris kutatások tárgya. Az eddigi tapasztalatok

és vizsgálati eredmények egyértelműen bizonyítják, hogy az iskolázás mind a tudás /tények, összefüggések, támpontok, megoldási módok stb./ közvetítése, mind a különböző értelmi tevékenységek /emlékezet, képzelet, ítéletalkotás, következtetések stb./ útján hozzájárul az ember meglévő képességeinek kifejlesztéséhez, és olyan adottságokat is mozgásba hoz, képességekké fejleszt, melynek nélküle nem nyilvánulnának meg." /Pedagógiai Lexikon II. kötet, 1977. 344.o./

Ez a néhány sor jól illusztrálja a képesség meghatározásának azokat a problémáit, amelyekre az előzőekben utaltam. A lexikon megfogalmazásából mindenesetre három dolgot érdemes kiemelni.

Az első az adottságok - képességek viszonyának meghatározása, az öröklődés és a tanulás szerepének a tisztázása. Ez voltaképpen a képességek kutatásának ősi dilemmája és a különböző képesség-elméletek ütközőpontja.

A másik probléma a képesség és a tehetség viszonya, az értelmezés ellentmondásossága, aminek egyik oka, hogy a "tehetség" szó igen sokféle jelentést hordoz. Használatos a "kiemelkedő képesség" jelentéssel, de előfordul a "rendkívüli hajlam" tartalommal is.

A harmadik figyelemreméltó mozzanat a meghatározásban a speciális és az általános képességek viszonya.

A lexikon értelmezése tehát e három problémakör fele - legalábbis részben - nyitott, de találunk ugyancsak három mozzanatot, ami határozott állásfoglalást jelent, és számunkra is használható kiindulópontnak bizonyul. Ezek pedig a kö-

vetkezők: a képesség valamely cselekvésre, teljesítményre /tevékenységre/ való alkalmasság; csak valamilyen teljesítmény után /tevékenységben/ nyilvánul meg, és meghatározott tevékenységek során fejlődik.

Mindez azonban konkrét képességek vizsgálatához még kevés támpontot ad. Ezért induljunk ki a képességek általános elméletéből, és az értelmezés fokozatos körülhatárolásával alakítsunk ki egy szigorubb, közvetlenül felhasználható koncepciót.

A képességek vizsgálatával, a képességek lényegével kapcsolatos legáltalánosabb elvi alapokat Rubinstein és Leontyev fejti ki.

Leontyev a képességek filogenetikus fejlődését elemzi. A képességeket az emberi tevékenységek kialakulásának, fejlődésének pszichikumbeli lenyomataként mutatja be. /Leontyev 1964. 359-369.o./

Rubinstein a képességek átfogó elméletét írja le. /Rubinstein 1964. 988-1009.o./ Részletesen elemzi a képességek és az adottságok kapcsolatát, valamint az általános és a speciális képességek viszonyát. A tehetség kérdésében nem foglaltározottan állást, bár inkább hajlik arra, hogy a tehetség fogalmát az általános képességek fogalmával azonosítsa. Az adottságok és a képességek viszonyáról alkotott felfogását a következő megfogalmazás jól összefoglalja: "Az adottságok és a képességek között igen nagy a distancia. Ott van közöttük a személyiség fejlődésének egész utja." /i.m. 989.o./

Egy későbbi munkájában Rubinstein a képességeket pszichikus képződményekként határozza meg. "Képességen a szó tulaj-

donképpen értelmében mint mondtuk, bonyolult képződményt, olyan pszichikus tulajdonságok komplexumát értjük, amelyek alkalmassá teszik az embert meghatározott fajtájú, történelmileg kialakult, társadalmilag hasznos szakmai tevékenységre. Minden sajátos képesség valamire való képesség" /Rubinstein 1967. 283.o./. A pszichikus képződmények Rubinsteinnél voltaképpen a pszichikus folyamatoknak, az agy tevékenységének az eredményei.

A pszichikus képződmény fogalma már használható fogódzkodó, alkalmas kiindulópont lehet, de még mindig túlságosan általános, differenciálatlan.

A képesség fogalmát tovább finomíthatjuk Piaget alapvető gondolatainak felhasználásával.

Piaget az értelmi műveletek kutatása során jut arra a megállapításra, hogy az értelmi műveletek strukturája és a matematika legáltalánosabb strukturái között igen szoros kapcsolat van. A Bourbaki csoport által feltárt matematikai struktúrákat Piaget empirikus vizsgálatai során az értelem műveleti strukturáiban véli felfedezni. /Piaget 1970. 198-225. o., 245-346.o./ Ezzel kapcsolatban az értelmi fejlődés egyes szakaszait, stádiumait bizonyos pszichikus struktúrák kialakulásával, megjelenésével jellemzi.

Ha a továbbiakban csak az értelmi képességekkel foglalkozunk, Piaget eredményeit közvetlenül felhasználhatjuk. Tekintsük tehát a képesség fogalmának következő közelítéseként Piaget pszichikus struktúra fogalmát.

Bár formailag Piaget mindvégig strukturalista, az a módszer, amelyet az értelmi műveletek vizsgálata, kapcsolataik,

működésük, rendszerük feltárása során alkalmaz, sok mozzanatában rendszerszemléletű. /Nem szeretném ezzel a megállapítással a strukturalizmus és a rendszerszemlélet közötti különbséget feloldani, azonban a strukturalizmust az általánosan elfogadott nézet szerint tekinthetjük a rendszerelmélet egyik közvetlen gondolati előzményének./

Szervesen kapcsolódhatunk tehát Piaget koncepciójához, ha a képességeket pszichikus rendszereknek tekintjük. Így a képességek tanulmányozása, elméleti elemzése és az empirikus vizsgálatok megtervezése során kiaknázhathatjuk azt a többletet, amit a rendszerszemlélet nyújt a strukturalizmussal szemben.

A "rendszer" szót már eddig is gyakran használták a képességekkel kapcsolatban, a rendszerszemlélettől függetlenül is. A következőkben a "rendszer" szóval a rendszerelmélet rendszer-fogalmát fogom jelölni.

A pszichológia ma még távol áll attól, hogy a személyiség egészét hierarchikus rendszerként írja le, habár már az első ilyenirányú kísérletek is óriási perspektívát nyitottak. /Nagy J. 1977. 199. o./ Ez azonban nem zárja ki, hogy a rendszer-koncepciót a személyiség megismerésének egy szűk területén, egyetlen képesség vizsgálata során eredményesen felhasználjuk.

Igy tehát már összegyűjthetjük azokat az elemeket, amelyek egy rendszerszemléletű képesség-fogalom alapjai lehetnek.

Az adottságok és a képességek viszonyának problémáját azzal a formális meghatározással kerülhetjük meg, hogy képességeknek a személyiség tanult tulajdonságait tekintjük, és ezzel a képességekről az adottságokat "leválasztjuk". És egy

pedagógiai irányultságú elemzésben a hangsúlyt egyébként is a tanult tulajdonságokra kell helyezni.

A képesség-tehetség problematikát is feloldhatjuk, ha csak azokkal a képességekkel foglalkozunk, amelyek az embernek nembeli tulajdonságai, azaz valamilyen szintvonalon minden emberben kialakulnak. A tehetség mint különleges hajlam vagy rendkívüli képesség kívül esik a mostani elemzés körén.

A képességek rendszerkénti leírása során lehetőség szerint csak a rendszerelmélet alapfogalmait fogom felhasználni. /A rendszerelmélettel kapcsolatban elsősorban Nagy J. /1978/ és Szadovszkij /1976/ munkáit tekintem kiindulópontnak./

A képességeket tekintsük tehát meghatározott struktúrával rendelkező működő pszichikus rendszernek.

A képességet pszichikus rendszerként tekintve először is a rendszer részeit és a részek közötti kapcsolatokat kell értelmeznünk. A rendszer részei gyakran maguk is rendszert alkotnak, így tehát a részek vizsgálata során a hierarchia egyre alacsonyabb szintjeire jutunk, és haladhatunk lefele, míg a "végső építőkövekig" el nem jutunk. Az azonban, hogy mit tekintünk végső elemnek, mindig relatív, és végső soron önkényes.

A képességek vizsgálata szempontjából a speciális képességeket tekinthetjük a képességek hierarchiájának legalsó szintjeként, amelyeknek a struktúráját és működését még értelmezhetjük, és amelynek részeit már nem tekintjük képességeknek. Az értelmi képességeket vizsgálva a legegyszerűbb rendszerek, a speciális képességek részeit valahol a pszichikus működés más szféráiban kellene keresnünk, ezzel azonban nem foglal-

kozom. A legegyszerűbb képességek, vagy speciális képességek - a képesség korábban elemzett meghatározásaival összhangban - azok a képességek lesznek, amelyek a legegyszerűbb tevékenységekkel, esetünkben a legegyszerűbb értelmi tevékenységgel állnak kapcsolatban. Speciális mivoltuk úgy értelmezhető, hogy közvetlenül csak egy, meghatározott, szűk tevékenységre való alkalmasságot jelentenek.

Az egyszerű képességek rendszerre szerveződése bonyolult képességet alkothat. A bonyolultabb képesség azonban nem csupán a részek mechanikus összessége, nem is csupán a részek együttműködése és kapcsolata, hanem új minőség, egységes egész, ami egy "rendszerminőséggel" több a részek additív összegénél.

A részek, kisebb rendszerek sokszoros kapcsolatokkal rendelkező igen nagy egységekké állhatnak össze, és ezeket tekinthetjük az általános képességeknek.

A részek legáltalánosabban tekintve kétféle séma szerint kapcsolódhatnak nagyobb egységekké. Az egyik típus a hierarchikus szerveződés, amikor a részek kisebb egységekké, ezek az egységek újabb, nagyobb rendszerekké állnak össze, és így tovább, egészen a sokszintes hierarchia kialakulásáig. A másik szerveződési formát az "egyenrangú", a hierarchia azonos szintjén levő elemek tetszőleges kapcsolatrendszer, kapcsolódási hálózata jellemzi. A kétféle strukturatípus megkülönböztetése különösen pedagógiai szempontból jelentős, hiszen kialakulásuk folyamata között nagy eltérések lehetnek. E kétfajta strukturával és ezek kombinációival a részek kapcsolódásának minden lehetőségét leírhatjuk.

Az értelmi képességek rendszerét mármost tekinthetjük

ugy, mint diszkrét elemeknek az összességét. Ezek az elemek mint speciális képességek és/vagy bonyolultabb képességek részei alakulhatnak ki. Ebből az összességből a bonyolultabb képességek egy-egy részt egy kapcsolódási hálózattal vagy egy hierarchikus struktúrával lefedhetnek. Az általános képességeket pedig egy nagyobb felület kapcsolódási hálózatának egységeként értelmezhetjük. A képességeknek ilyen felfogása teljesen összhangban van Rubinstein általános megállapításai-val és útmutatásaival. "Az ember minden speciális képessége végső soron különböző megnyilvánulása, oldala az emberi kultúra eredményei elsajátítására és annak továbbfejlesztésére alkalmas általános képességének." /Rubinstein 1964. 992.o./ És szinte "sugallja" a rendszerelméletű megközelítés szükségességét a következő megállapítása: "Végeredményben teljesen helytelen az a kísérlet is, amely a tehetséget a speciális képességek tisztán mechanikus összességére vezeti vissza, valamint az is, amely külsőleg szembeállítja az általános tehetséget a speciális képességekkel. Csak az általános és speciális tulajdonságok egysége a maga kölcsönhatásában rajzolatja meg az emberi tehetség valódi arculatát, amely megnyilatkozásainak sokfélesége ellenére is megőrzi belső egységét." /i.m. 966.o./

A képességek rendszerkénti felfogása, értelmezése nem cél, hanem eszköz a képességek alaposabb megismeréséhez. A rendszerfelfogás azonban csak akkor helytálló, ha nem mond ellent eddigi tudásunknak, vagyis a képességekről már meglévő ismereteink integrálására is alkalmas. Hogy ez így van, annak illusztrálására csak néhány példát tekintsünk.



A szkéma fogalma abban az értelemben ahogy azt Skemp használja, valójában megegyezik<sup>a</sup> pszichikus rendszerként értelmezett képesség fogalmával /Skemp, R. 1975. 46-70.o./ Skemp a szkémákat következőképpen határozza meg: "Az általános pszichológiában a szellemi strukturákat szkémáknak szoktuk nevezni. Ezt a kifejezést nemcsak a matematika komplex strukturáira használjuk, hanem azokra a viszonylag egyszerű strukturákra is, amelyek a szenzomotoros tevékenységet koordinálják." /i.m. 49.o./ Ez a megfogalmazás egyébként indokolttá teszi azt is, hogy a pszichikum egészét rendszerként értelmezzük, és a pszichikus rendszer fogalmát az összes pszichikus működésre kiterjesszük.

A pszichikus rendszerek működésének fontos mozzanatát világítja meg Skemp következő megállapítása: "Egy szkémának két fő funkciója van: integrálja a meglevő tudást, és szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához." /i.m.49.o./

A pszichikus rendszerek hierarchikus felépülését szemlélteti a következő idézet: "A repülőgép tervezés megtanulásához ismernünk kell az aerodinamikát, ami viszont feltételezi a differenciál- és integrálszámítás ismeretét, ez viszont elengedhetetlenné tesz bizonyos algebrai ismereteket, ami viszont bizonyos aritmetikai tudásra épül." /i.m. 50.o./

Piaget által bevezetett akkomodáció és asszimiláló fogalmát is könnyen értelmezhetjük a rendszerfelfogással.

A szkémák akkomodációjának fogalma a szkémák átalakulását, szigorú értelemben a szkémák strukturális változását fejezi ki. Az asszimiláció az új elemeknek a szkémába való beépülését, a szkéma bővülését jelenti. Így az asszimiláció és az

akkomodáció a pszichikus rendszerek fejlődésének két, szorosan egymásba fonódó oldalaként értelmezhető, a mennyiségi gyarapodás és a minőségi átalakulás mozzanatát jelölik.

Ehhez kapcsolódóan a megértés fogalmát is beilleszthetjük a pszichikus rendszerekről alkotott képbe. "Valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába" - írja Skemp. /i.m. 59.o./ A rendszer - reprezentációban ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy valaminek a megértése annyit jelent, hogy beillesztjük a pszichikus rendszerek rendszerébe, egy vagy több rendszernek funkcionáló, működőképes részévé tesszük.

A transzfernek nevezett jelenség a képességek rendszer-reprezentációjából egyenesen következik. A transzfer, vagy más szóval átvitel fogalmán a pszichológiában azt a jelenséget szokás érteni, hogy bizonyos területeken elvégzett gyakorlás, fejlesztés áttérjed a pszichikus élet más területeire is. Ha a képességeket részekből felépülő pszichikus rendszereknek tekintjük és feltesszük, hogy ugyanazok a részek több rendszerhez is tartozhatnak, a transzferhatást úgy értelmezhetjük, mint egy működő rendszerből egy másik működő rendszer megalkotása az előzőleg kialakult rendszer részeinek felhasználásával és/vagy kiegészítésével. A transzferhatásról tehát olyankor beszélhetünk, amikor a két képességet reprezentáló struktúra kisebb-nagyobb mértékben fedi egymást. És minél nagyobb az átfedés, annál nagyobb a transzferhatás, vagyis minél jobban hasonlít egymásra a két képesség egyik megtanulása annál jobban segíti a másikat.

Értelmezhető így a negatív transzfer jelensége is. Itt

szintén a kapcsolódási hálózatok átfedéséről van szó, pontosabban az egyes elemek, részek megegyeznek, de kapcsolódásuk ellentétes jellegű. Ilyenkor az előző kapcsolatok felszabadtatásához, semlegesítéséhez bizonyos többletenergia befektetésére van szükség /miként a kémiában is aktiválási energiára van szükség a molekulák atomokra bomlásához, hogy azután az atomok új módon más molekulákká egyesüljenek/.

A transzferhatás érvényesüléséhez szükséges, hogy a pszichikus rendszerek részei sokoldalú kapcsolattal vagy potenciális kapcsolatokkal rendelkezzenek. Elkülönült, önmagában álló rendszer nem segítheti más rendszerek kialakulását. Összhangban Dienes megállapításával, mely szerint csak a megértett tudás eredményezhet transzferhatást. /Dienes 1973. 35.o./

És már itt felvethető, hogy mit jelent a pszichikus rendszerek pedagógiai célú megismerése. Először is a részek ismeretére lenne szükség, vagyis azoknak az alapvető képességeknek a megismerésére, amelyekből a bonyolultabbak felépülnek. Fel kell tárni továbbá a bonyolultabb képességek strukturáját, a részek kapcsolódását, és a rendszerek működését. Így meg lehet találni azokat a képességeket, amelyek legjobban reprezentálják a képességek rendszereinek a rendszerét, illetve azokat a tevékenységeket, amelyek ezeket a képességeket fejlesztik. Továbbá meg lehet így találni azokat a tevékenységeket is, amelyek a merev strukturákat "fellazítják", vagyis a rendszerek részeit a sokoldalú kapcsolódásokra alkalmassá teszik, és ezáltal az általános képességek fejlődését elősegítik. Természetesen a képességek megismerése nem ebben a sorrendben és nem is így elkülönítve történhet, hanem az egyes

oldalak összetettségükben, kölcsönhatásukban tárhatók csak fel.

A képességek és más pszichikus rendszerek viszonyának, a személyiség egészében betöltött szerepének rendszerszemléletű elemzése, a képességekkel kapcsolatos elméleti ismereteinket sokban gazdagítja, az ilyen kapcsolatok vizsgálata azonban nem szükséges a kombinatív képesség fogalmának megalkotásához. /A pszichikus rendszerek rendszeréről ld. Nagy J. 1978. 183-193.o./

Az előző rövid elemzéssel nem szándékozom a képességek különböző értelmezéseit leegyszerűsíteni, sem különbségeiket összemosni. Nem is a meglévő ismereteink öncélú átfogalmazása a rendszerelmélet terminológiájával, hanem annak igazolására szolgál, hogy a rendszerkoncepció a képességek megismerésének adekvát eszköze lehet, alkalmas nyelv a képességek leírására, reprezentálására. A rendszerelmélet alkalmazásának értékét azonban nem ez a formális szempont dönti el, hanem azok az eredmények, az a többlet, amit a rendszerfelfogás a képességek megismerésében nyújt.

A képességek rendszerszemléletű felfogásával kapcsolatban még egy kérdést érdemes megvizsgálni, mégpedig az adottságok problémáját.

Több okból is kézenfekvőnek tűnik, hogy az adottságokat is strukturával rendelkező, működő rendszereknek tekintsük. Az adottságokban mindazokat a rendszereket foglalhatjuk össze, amelyek a személyiség nem tanult tulajdonságai, és amelyek a képességek kialakulásának előfeltételei. Számunkra ebben a megközelítésben egyelőre mellékes, hogy itt a szervezet

fiziológiai, morfológiai sajátosságairól van szó.

E megközelítésmód használhatóságát többirányu meggondolással is igazolhatjuk. Az adottságok a képességekkel összefüggésben az irodalomban többnyire pusztán mennyiségi faktorokként fordulnak elő, amelyek a képességek előfeltételei és kialakulásuknak sebességét és/vagy, maximálisan elérhető fejlettségét határozzák meg. Ha az adottságokat rendszereknek tekintjük, természetesen értelmezhetővé válnak az adottságok finom minőségi különbségei is. Értelmezhetővé válnak az olyan problémák gyökerei is, amelyeket Dienes a következőképpen ír le: "Ha azonban igaz az, hogy egy és ugyanazon matematikai gondolathoz a különböző gyerekek más-más úton juthatnak el, akkor a képesség szerinti szétválasztás útján sem hozhatunk létre homogén tanulócsoportokat, és változatlanul súlyos nehézségek léphetnek fel, mint ahogy a valóságban fel is lépnek.

A legújabb kutatások arra mutatnak, hogy valóban vannak egyéni különbségek nem csupán a matematikai, hanem más absztrakt fogalmak kialakításának módjában is, és a matematikatanár nehézségei nagymértékben abból származhatnak, hogy nem ismeri eléggé ezeket a különbségeket." /Dienes 1973. 30.o./

A képességek és az adottságok viszonyát illetően még egy érdekes problémát érdemes felvetni. Azt, ami Piaget szerint egyidős a nyugati filozófiával /Piaget 1970. 198.o./, ami már Platónnál és Arisztotelésznél megtalálható, és amit Leibniz Locke-kal vitatkozva a következő módon fogalmaz meg: "Annak megállapításáról van szó, vajon Aristoteles és a vizsgálódás szerzője szerint a lélek magában véve egészen üres-e, mint az olyan táblácskák, amelyekre még semmi sincs írva /tabula rasa/

és vajon mindaz, ami arra följegyeztetik, egyedül az érzékekből és a tapasztalatból származik-e, - vagy pedig vajon a lélek eredetileg is magában foglalja-e bizonyos ismereteink alapjait, amelyeket a külső tárgyak csak alkalmilag újra fölébresztenek benne." /Leibniz, 1930. 20.o./

Piaget ezt a problémát a pszichológia, a fejlődéslélektan nyelvén fogalmazta meg és vizsgálta részletesen.

Ha az adottságokat strukturával rendelkező, működő rendszereknek tekintjük, a kérdést a rendszerelmélet nyelvén is megfogalmazhatjuk és a széleskörű empirikus kutatás számára megnyithatjuk. És levonhatjuk a pedagógiai konzekvenciákat is; a képességek rendszerét úgy kell kialakítanunk, hogy az adottságok rendszerét figyelembe vesszük, a képességek rendszerét mintegy az adottságok rendszeréhez illesztjük, mind a strukturát, mind a működést illetően. Valahogy úgy, ahogy a számítógép által kezelt adatoknak, műveleteknek, programoknak a strukturáját és működését is hozzáillesztik kezelői a gép "adottságaihoz", a gép működéséhez és strukturájához.

Ez utóbbi koncepció - az adottságok és a képességek rendszerének különválasztása és kapcsolatuk vizsgálata - bizonyos szempontból hasonlít Köhler gestaltpszichológiájához.

A rendszerfelfogás azonban nem foglal állást a kapcsolat milyenségének kérdésében, sőt éppen tág teret nyit a lehetőségek keresésében. Arra pedig már a konkrét alkalmazás során kell ügyelni, hogy mind az izomorfizmus, mind a pszichomorfologizmus buktatóit elkerüljük.

A következő részben az itt bevezetett eszközöket, elveket a kombinatív képesség vizsgálatára fogom alkalmazni.

## 2. A KOMBINATIV KÉPESSÉG TÁGABB ÉS SZÜKEBB FOGALMA

Ha a kombinativ képesség olyan meghatározásához kívánunk eljutni, ami a kutatás és a pedagógiai gyakorlat számára egyaránt használható, számos szempontot kell figyelembe vennünk, mérlegelnünk.

Azoknak a pedagógiai vagy pszichológiai kutatásoknak az eredményei, amelyek a kombinativ képesség valamilyen vetületével kapcsolatosak, azt tükrözik, hogy a kombinativ képesség meglehetősen bonyolult pszichikus rendszer, amelynek strukturáját, működését a maga totalitásában egyelőre nem tudjuk feltárni. A kombinativ képesség legáltalánosabb fogalmát azonban úgy kell meghatározni, hogy abba az empirikus kutatások számára ma még kevésbé hozzáférhető területek is beletartozzanak. Ugyanakkor vannak a kombinativ képességnek olyan részei, amelyek jól leírhatók, empirikusan vizsgálhatók, mindenképpen hasznos ezeknek a területeknek a különválasztása, önálló meghatározása. Így az a megoldás látszik célszerűnek, hogy először meghatározzuk a tágabb értelemben vett kombinativ képesség fogalmát, majd a szükséges korlátozások, megszorítások segítségével ebből különítjük el a közvetlenül vizsgálható, hozzáférhető részt.

A kombinativ képesség tágabb fogalmának kialakításához felhasználhatjuk azokat a lényeges jegyeket, tulajdonságokat, amelyeket a képesség fogalmáról és a kombinativitás köznyelvi és matematikai értelmezéséről összegyűjtöttünk.

A képességekről megállapítottuk, hogy azok pszichikus rendszerekként kezelhetők, és minden képesség valamilyen tevékenységben nyilvánul meg. Így meg kell határoznunk, melyek azok a tevékenységek, amelyekben a kombinatív képesség meg nyilvánul.

A "kombináció", "kombinál" szavak köznyelvi jelentéséből kiindulva a "kombinálás"-t, mint tevékenységet az "összeállítás, egybeillesztés, összekapcsolás, csoportosítás, lehetőségek számításba vétele, mérlegelése, megvalósítása" tevékenységek körében kell keresnünk. A matematikai értelmezésből kiindulva a kiválasztást, rendezést, adott feltételeknek eleget tevő sokféle konstrukció előállítását kell még az előbb felsoroltakhoz hozzávennünk.

Ezeknek a fontosabb vonásoknak a figyelembevételével a kombinatív képesség legáltalánosabb fogalmát a következőképpen definiálhatjuk:

Tágabb értelemben kombinatív képességen azt az állandósult bonyolult pszichikus rendszert értjük, amelynek működése révén az ember változatos módon képes dolgok vagy események tetszőleges összességéből meghatározatlan szabályok szerint bizonyos számot kiválasztani és/vagy létrehozni ezek egymástól különböző összeállításait, amelyek valamilyen körülrített feltételeket kielégítenek.

Ezzel a definícióval egy általános képességet értelmeztünk, ami a kombinatív tevékenységek, a kombinatív képesség működésének valamennyi formáját magában foglalja. A kombinatív képesség általános jellegének egyik oldalát jelenti, hogy a képesség azonos működései a legkülönbözőbb konkrét tartal-



makon, dolgok vagy események bármilyen összességében megvalósulhatnak. A képesség általánosságának másik oldalát a kombinatív képesség működéseinek, a kombinatív tevékenységeknek a sokfélesége adja.

A definíció a kombinatív tevékenységeknek ezt a sokféleségét azáltal veszi figyelembe, hogy a képesség működésének három mozzanatát nyitva hagyja.

Az egyik ilyen nyitott mozzanat az, hogy lehetnek a kombinatív tevékenységnek olyan formái, amelyek során a produktum, a konstrukció elkészítéséhez felhasználható dolgok összessége meghatározatlan. Ez azt jelenti, hogy a tevékenység megkezdésekor nincs definiálva a dolgoknak az az összessége, az az univerzum, amelynek elemeiből a konstrukció elkészíthető. Így az alkalmas elemek felismerése, kiválasztása is a képesség működéséhez tartozik.

Lehetnek meghatározatlanok a konstrukciók megalkotásának szabályai is, olyan értelemben, hogy nincsenek explicite kifejezett előírások vagy korlátozások az elemek felhasználására, összeillesztésére, társítására vonatkozóan. Ezeket legfeljebb a tevékenység céljának, produktumának az elkészítendő konstrukcióknak a leírása impliciten tartalmazza.

És végül lehet definiálatlan maguknak a létrehozandó konstrukcióknak a köre. Vagyis nem pontosan leírt, meghatározott felépítésű konstrukciókat kell létrehozni, hanem csak általános, körülírásokkal megadott feltételek szabják meg, hogy az elemek milyen tulajdonságú összeállításaira van szükség.

A kombinatív képesség tágabb fogalmának ilyen kibővítését a gyakorlatban felmerülő problémák, a képesség leggyakoribb működései valóban indokolttá teszik. A képesség bonyolultabb működéseit ugyanis rendszerint olyan problémák megoldásában figyelhetjük meg, amelyeknek nem csak egyetlen megoldása van, hanem a feltételeket dolgok többféle összeállítása is kielégíti. Ilyenkor a megoldások keresése során legtöbbször összefonódik annak elemzése, hogy valójában milyen konstrukciókat kell létrehozni, a konstrukciók elkészítéséhez szükséges elemek felkutatásával, kiválasztásával és az elemek tulajdonképpeni kombinálásával. A kombinatív képességnek ezek a bonyolult működései szorosan összekapcsolódnak más általános képességekkel, például a problémamegoldó gondolkodással vagy az alkotóképességgel. Annak megmutatására, hogy a kombinatív képesség mégsem azonos az említett általános képességekkel, hanem csak azok részét képezi, majd egy későbbi részben, viszonyaik részletesebb vizsgálata során fogok kitérni. Itt elég csupán arra utalni, hogy a kombinatív képesség működésébe nem értjük bele az elkészített konstrukciók közötti válogatást, a konstrukciók "jóságának", használhatóságának megállapítását, értékelését, vagyis az értékelő képesség működését. A kombinativitás fejlettségét, minőségét csupán az előállított konstrukciók változatossága, a megvizsgált lehetőségek gazdagsága alapján ítéljük meg. Ezen az általános szinten azonban a gazdagság, változatosság megítélésére meglehetősen nehéz kritériumokat találni. A bonyolult összefonódások, átfedések miatt a képesség működésének feltárása is csak fokozatosan, a részek külön-külön történő vizs-

gálata után lehetséges.

A tágabb értelemben vett kombinatív képesség definíciójában a képesség működésének három nyitott mozzanata a legbonyolultabb eseteket is értelmezhetővé teszi, az egyszerűbb esetekben azonban a három mozzanat közül egy vagy több meghatározott. A különböző mozzanatok meghatározottsága szerint hét változatot különböztethetünk meg, ezekre azonban nem fogok egyenként részletesen kitérni.

A határozott mozzanatok számának növelésével a kombinatív képesség egyre jobban leírható részeit, különíthetjük el. Azokból az esetekből, amelyeknél a definíció nyitott mozzanatai közül egyet tekintünk adottnak, azt a lehetőséget érdemes kiemelni, amikor az elkészítendő konstrukciók leírása, pontosan meghatározott, az előállítás szabályai és a felhasználható elemek összessége azonban nem. Valószínű, hogy a kombinatív képesség legáltalánosabb meghatározásának megfelelő működés után ez az eset fordul elő leggyakrabban. A kombinatív képesség újabb fontos részét különíthetjük el, ha az előállítandó konstrukciók leírása mellett a felhasználható elemek is adottak. Végül, ha ezek mellett az előállítás szabályai is explicite adottak, eljutunk ahhoz a lehetőséghez, amelynél a definíció mindhárom nyitott mozzanatát meghatározzuk.

Igy a tágabb értelemben vett kombinatív képesség legjellegzetesebb középponti részét különíthetjük el, ami a többi képességek lényeges részét alkotja. Ez a rész már jól körülhatárolható, értelmezhető, leírható. Ezért célszerű a tágabb értelemben vett kombinatív képességnek ezt a részét szűkebb értelemben vett kombinatív képességként definiálni a követke-

zóképpen:

Szűkebb értelemben vett kombinatív képességnek nevezzük azt az állandósult bonyolult pszichikus rendszert, amelynek működése révén az ember változatos módon képes dolgok vagy események megadott összességéből meghatározott szabályok szerint bizonyos számot kiválasztani, és/vagy létrehozni ezek egymástól különböző összeállításait, amelyek megadott feltételeket kielégítenek.

Az így definiált képességet még mindig az általános képességek körébe kell sorolnunk, mivel azonos felépítés mellett a legkülönbözőbb tartalmakon működik, és a működési formái is nagyon sokfélék lehetnek.

A sokféle működési forma azonban már kisszámu, meghatározott szerkezetű műveletből épül fel, így a szűkebb értelemben vett kombinatív képességet komplex műveleti képességnek tekinthetjük. A kombinatív képesség műveletei, a kombinatív műveletek számbavehetők, szerkezetük, működési mechanizmusuk, kapcsolódási lehetőségeik feltárhatók.

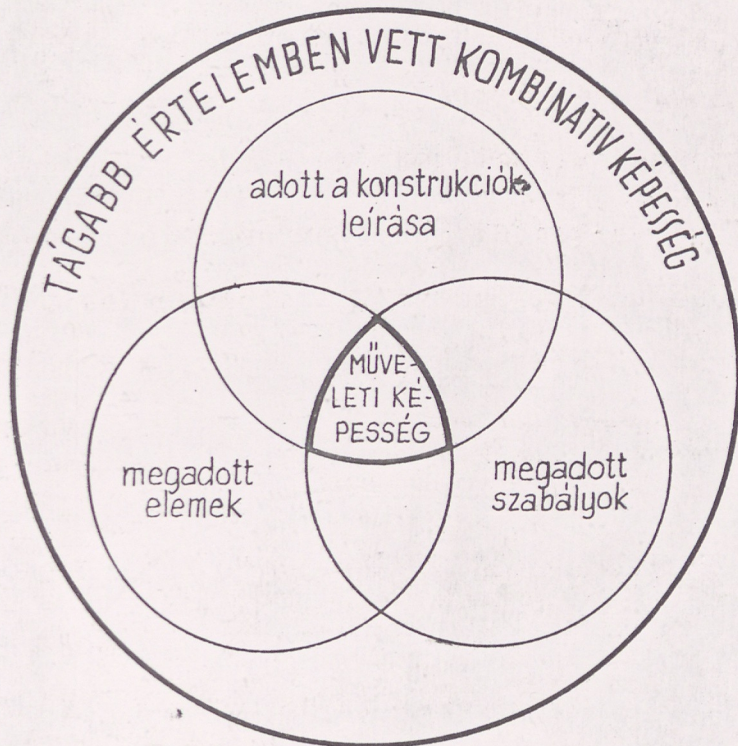
A szűkebb értelemben vett kombinatív képességgel kapcsolatban a változatosság fogalmát, az előállított konstrukciók gazdagságának a megítélését is újraértékelhetjük. Meghatározott elemekből meghatározott szabályok szerint meghatározott feltételeket kielégítő konstrukciók előállítása esetén egyben az is meghatározott, hogy összesen legfeljebb hányféle egymástól különböző konstrukciót lehet létrehozni. Így az előállított konstrukciók gazdagságának változatosságának megítélésakor az összes lehetőséghez viszonyíthatunk, és egy képességet akkor tekinthetünk kifejelettnak, ha adott esetben az összes



lehetőséget produkálja.

A kombinatív műveleti képességről feltételezhetjük, hogy fejlettsége a tágabb értelemben vett kombinatív képesség működését, fejlettségét is erősen meghatározza. A szűkebb értelemben vett kombinatív képességnek olyan szerepet tulajdoníthatunk a tágabban értelmezett kombinatív képességben, mint amilyen a formális logikai műveleteknek van a tágabban vett logikus gondolkodásban, vagy a nyelv grammatikája által meghatározott nyelvi műveleteknek a nyelv széleskörű használatában.

A tágabb értelemben vett kombinatív képesség és a műveleti képesség feltételezett viszonyát, a műveleti képesség származtatását a 15. ábrán látható módon szemléltethetjük.



15. ábra

Azt, hogy a tágabb és a szűkebb képesség között valójában milyen a kapcsolat, az itt elkülönített részek milyen súlyok, fontosságuk, elméleti elemzéssel nem lehet eldönteni. Az elméleti elemzés lehetőségei és feladatai a problémák megfogalmazásáig, az empirikus vizsgálatok alapjául szolgáló modellek megalkotásáig terjed. A tágabb értelemben vett kombinatív képességnek az itt vázoltnál részletesebb felbontásával, elemzésével a továbbiakban nem foglalkozom, erre csak a műveleti képesség alapos megismerése után kerülhet sor.

A szűkebb értelemben vett kombinatív képesség struktúráját és működését a következő részben elemzem.

### 3. A SZÜKEBB ÉRTELEMBEN VETT KOMBINATIV KÉPESSÉG

A kombinativ képességnek mint pszichikus rendszernek a megismerése az előző részben kifejtett elvek értelmében a képesség részeinek, a részek kapcsolatainak, a rendszer struktúrájának feltárását, működésének és egészként való funkcionálásának leírását jelenti.

A pszichikus rendszer kialakulását két oldalról közelíthetjük meg, két másik rendszerrel hozhatjuk kapcsolatba.

Az egyik oldal az egyént körülvevő világ, az objektív valóság; a felhalmozódott ismeretek összessége, az objektívalódott tudás, valamint az ezek megismerését kifejező tevékenységrendszer. Ez valójában három rendszer, a továbbiak szempontjából azonban nem szükséges, hogy ezeket különválasszuk, megkülönböztessük, mivel mind a bennünket körülvevő világot, mind az objektívált tudást /ami szintén része az objektív valóságnak/ tevékenységeken keresztül sajátítjuk el, a két másik rendszerrel a tevékenységrendszeren keresztül kerülünk kapcsolatba. Ez tehát az egyik oldal, amiből a kialakuló pszichikus rendszereket származtathatjuk. Ha a pszichikus rendszereket ebből az oldalból levezethetnénk, a feladat triviálissá válna, az objektívált tudás rendszerének elemzésére szűkülne le.

Figyelembe kell azonban vennünk a másik oldalt is, az adottságok rendszerét. A szervezet fiziológiai, strukturális sajátosságait, az értelmi képességek esetében az idegrendszer

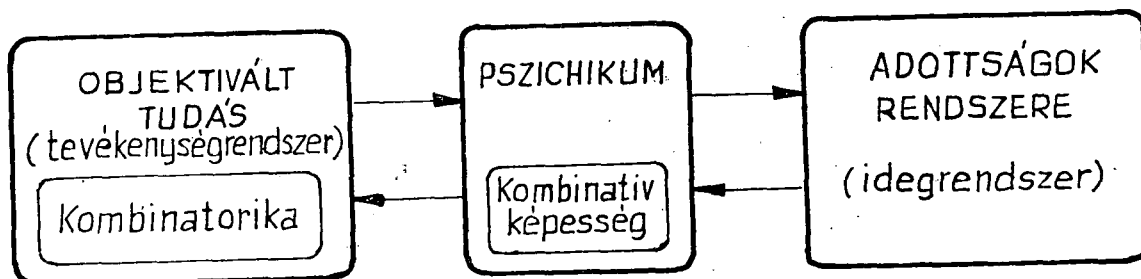


tulajdonságait. De az adottságokból a képességek ugyanugy nem vezethetők le, mint az objektivált tudásból.

Az egyetlen helyes megoldáshoz akkor jutunk, ha a pszichikus rendszert két másik rendszer között elhelyezkedőnek, kialakulását két másik rendszer kölcsönhatásának tekintjük. Hasonlóan foglal állást Wallon, amikor a gondolkodás szervi és értelmi strukturáinak, valamint a dolgok strukturáinak viszonyait értelmezi /Wallon, H. 1971. 227-259.o./. "A gondolkodás, miként nélkülözhetetlen eszköze a nyelv is, kétfajta struktúra között helyezkedik el: ezek a szervi strukturák, melyek biológiai alapjai, továbbá azok a strukturák, melyeket rendeltetése szerint kifejezésre kell juttatnia." /i.m. 229.o./

Ilyen értelemben a képességek megismerésének adekvát módszerét e három rendszer, az objektivált tudás, a pszichikum és az adottságok rendszerének vizsgálata jelenti.

A három rendszer részei azonban nem közvetlenül hatnak egymásra, hanem az egész rendszer áll kapcsolatban a másik rendszer egészével, így az egymásnak megfelelő részek érintkezése közvetett. Az objektivált tudás bármilyen szűk körének elsajátításában az egész pszichikum szerepet játszik. A kombinatív képesség szempontjából tekintve ezt a megközelítésmódot a 16. ábrán látható vázlattal szemléltethetjük.



16. ábra



Ezzel az egyszerű sémával a képességek bonyolult működésének igen sok vonását lehet értelmezni, a továbbiakban azonban csak a kombinatív képességgel összefüggő problémákra térnek ki.

A kombinatív képességnek az objektivált tudás felőli megközelítése a kevésbé problematikus. Az objektivált tudás, és a tevékenységrendszer is, az értelmezés számára közvetlenül hozzáférhető, az adekvát eszközök megtalálása után struktúrája és működése megismerhető.

A másik oldal, az idegrendszer és a pszichikum kapcsolatának kérdése már korántsem ilyen egyszerű. Erről az oldalról ma még csak nagyon kevés ismeret, inkább csak hipotézisek, találgatások állnak rendelkezésünkre. A pszichikus rendszerek idegrendszerbeli reprezentációjára vonatkozóan az elméletek széles skálájával találkozhatunk. A skála egyik végpontján találjuk azt a felfogást, mely szerint a pszichikum és az idegrendszer analóg vagy éppen izomorf jelenség /McCulloch, Pitts, G. Walter, idézi: Piaget, J. 1970.339.o./, a másik szélén pedig az a nézet áll, hogy az idegrendszer egészen más mechanizmus szerint működik, amelyet a ma ismert matematikával nem lehet leírni /Neumann J. 1972. 111-112.o./. Így az elemzésnek azt az oldalát csak közvetve lehet végiggondolni, az adottságok közvetlen figyelembevételé helyett a pszichikus működés más részeiről szerzett ismeretekből következtethetünk a kombinatív képesség megfelelő vonatkozására.

Az elemzés módszere jelen esetben csak deduktív, rendszerező jellegű lehet. A rendelkezésre álló ismeretek rendezésére, strukturálására, az ezekből levezethető ismeretek

összegyűjtésére és a hiátusok kimutatására, a problémafeltáráásra terjedhet ki.

E részben a szűkebb értelemben vett kombinatív képességet mint komplex műveleti képességet vizsgálom. A rendszerfelfogás szerint az egészt nem lehet csupán a részekből levezetni, megérteni, a részek egybeszerveződése új minőséget jelent. Különösen vonatkozik ez a pszichikus rendszerekre, amelyek kialakulására, fejlődésére a tagolatlan egész megjelenése és fokozatos differenciálódása, részek elkülönülése éppugy jellemző, mint a részek elsődleges kialakulása majd bonyolultabb egységbe szerveződése, integrálódása.

Ennek megfelelően először a szűkebb értelemben vett kombinatív képességnek mint egésznek a strukturáját és működését vizsgálom meg, majd a képesség részeit, a kombinatív műveleteket valamint ezek konkrét működéseivel összefüggő problémákat, az elemszám és a tartalom kérdéseit.

### A kombinatív műveleti képesség mint egész

Az előző részben megadott definíció szerint a kombinatív képességet akkor értelmezhetjük műveleti képességként, ha meg van adva a feltételek összessége, amelyet az elkészítendő konstrukcióknak ki kell elégíteni, adottak az előállítási szabályai és adott a felhasználható elemek összessége. Egy műveleti képesség kifejelettségéről pedig akkor beszélhetünk, ha az ember adott esetben az összes lehetséges konstrukciót képes előállítani, és tudja azt is, hogy többet már

nem lehet elkészíteni.

Adott feltételeket kielégítő konstrukciókat, sokféle, esetleg az összes konstrukciót azonban úgy is el lehet készíteni, hogy a képesség, a megfelelő művelet még nem alakult ki. A komplex műveleti képesség teljes feltárásához az ilyen előállítási lehetőségeket is értelmezni kell, vagyis figyelembe kell venni a képesség fejlődésének, fejlettségének különböző szintjeit.

A fejlődés fázisainak, a fejlettség stádiumainak, a pszichikus szinteknek a meghatározása során kiindulhatunk Piaget-nak az intellektus fejlődésére vonatkozó sémájából.

Piaget az értelem fejlődésében a következő szakaszokat különíti el /Piaget, J. 1970. 66.-76.o./:

- I. Az érzékszervi-mozgásos értelem periódusa /a születéstől kb. a 24 hónapos korig/.
- II. A konkrét műveletek előkészítésének és szerveződésének periódusa.
  - II.A. A műveletek előtti képzetek szakasza /2 éves kortól 7-8 éves korig/.
  - II.B. A konkrét műveletek szakasza /7-8 éves kortól 11-12 éves korig/.
- III. A formális műveletek periódusa.
  - III.A. A formális műveletek kialakulása /11-12 éves kortól 13-14 éves korig/.
  - III.B. A formális műveletek egyensúlyba jutása /13-14 éves kor körül/.

A stádiumok életkori beosztását nem tekinthetjük szigoruan állandónak. Az életkori hatásokról maga Piaget is megál-

lapitja: "Nem életkori állandóságról, hanem a sorrendi egymásután állandóságáról van szó. Egy adott népesség vonatkozásában jellemezhetjük a szakaszokat az életkorral, de ez az időbeosztás rendkívül változó. Függ az egyedek korábbi tapasztalataitól, s nem csak érettségüktől; és elsősorban függ a társadalmi környezettől, amely meggyorsíthatja vagy késleltetheti egy szakasz megjelenését, sőt meg is akadályozhatja megnyilvánulását. Bonyolult jelenségek ezek és nemigen tudnám megmondani, hogy az általunk megállapított szakaszoknak megfelelő átlagos életkor mennyire érvényes bármilyen más népességre. Csak a vizsgált népességre vonatkozó életkorokat mérlegelem. Ezek tehát szükségszerűen viszonylagos életkorok." /i.m. 67.o./

Ami a kombinatív képességet illeti, Piaget feltételezése szerint a kombinációképzés művelete 11-12 éves korban kezd kialakulni. Az új matematika tanításával kapcsolatos kísérletek azonban azt bizonyítják, hogy megfelelő módszerekkel már egészen kis gyermekeknél ki lehet alakítani olyan kombinatív műveleteket, amelyeket Piaget már a formális szint megnyilvánulásának tekint /Varga T. 1967., illetve Piaget, J. 1967. 107.o., 1970. 74.o., 332.o./.

Igy Piaget-től csak a fejlődés stádiumainak felosztását vehetjük át, a stádiumok merev életkorhoz rendelése nélkül. Azt azonban szintén feltételezhetjük, hogy hasonló kulturális, szociális környezetben élő gyermekeknél azonos oktatás esetén az egyes stádiumok is többé-kevésbé azonos időszakban jelennek meg. Így a kísérleti munka egyik feladata éppen annak a megvizsgálása lesz, hogy az adott populációban a fejlődés e-

gyes szakaszai melyik életkorban jelennek meg, és milyen egyéni különbségek vannak.

Az oktatás azonban a fejlődésre nemcsak gyorsító hatást gyakorolhat, hanem minőségi változást is eredményezhet a "spontán" fejlődéshez képest. Az iskolai oktatás eredményeként megtanult műveleteket ugyanis nemcsak el tudjuk végezni, hanem tudjuk is azt, hogy milyen műveletet végzünk, többnyire tudatosan alkalmazzuk a műveletvégzés törvényeit. A teljességre törekedve ezt a lehetőséget is figyelembe kell vennünk. Ha tehát Piaget-től a kombinatív képesség fejlettségének jellemzésére átvesszük a "művelet előtti szint", a "konkrét műveletek szintje", és a "formális műveletek szintje" kategóriákat, azokat ki kell egészítenünk egy negyedikkel, amit a "tudatos műveletvégzés szintjének" nevezhetünk.

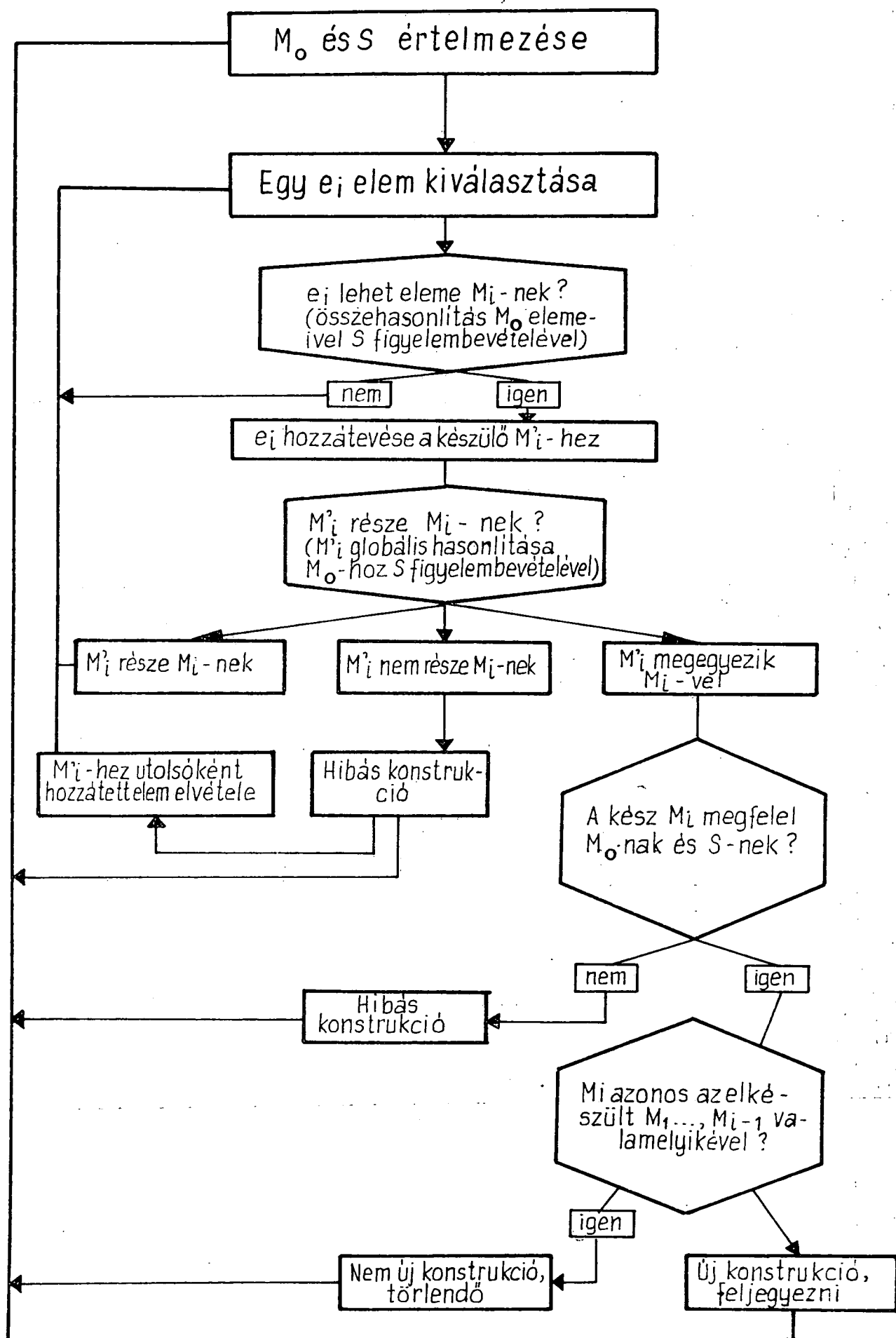
Igy tehát a kombinatív képesség fejlődésének a következő négy szintjét fogjuk megkülönböztetni: művelet előtti szint, a konkrét műveletek szintje, a formális műveletek szintje és a tudatos műveletvégzés szintje. E négy fejlődési szint alapján már értelmezhetjük a kombinatív képesség szintenként különböző működési módjait.

A művelet előtti szintre a teljesen rendezetlen próbálgatás, a koncepció nélküli keresgélés a jellemző. Azonban ezen a szinten is számításba vehetjük, hogy elvileg milyen feltételek és milyen lépések szükségesek egymástól különböző konstrukciók előállításához.

Az elkészítendő konstrukciók leírását legáltalánosabban valamilyen minta megadásaként foghatjuk fel, ami az összes lehetséges konstrukció tulajdonságát egyesíti magában. Ez le-

het valódi minta, egy reprezentáns konstrukció és a hozzá kapcsolódó értelmezés, lehet leírás formájában adott, lehet feltételekkel adott /Egy elemi példa: három sávból álló zászlókat kell készíteni./ A mintát elemekből állónak tekinthetjük:  $M_0 = /e_{01}, e_{02}, \dots, e_{0n}/$ . Az elemek lehetnek rendezetlenek, alkothatnak sorozatokat, elemrendszereket, vagy lehet bonyolultabb elrendeződésük. Adottnak kell lenni a képzési szabályok összességének:  $S = /s_1, s_2, \dots, s_n/$ ; továbbá a felhasználható elemek összességének:  $H = /e_1, e_2, \dots, e_n/$ . Ez utóbbi lehet egy vagy több halmaz, vagy matematikai értelemben halmaznak sem tekinthető összesség. /Képzési szabályokon nem a műveletvégzés törvényeit érttem, hanem olyan feltételeket, korlátozásokat, szabályokat, amelyeket a konstrukcióképzés során be kell tartani. Az előbbi példánál maradva: a zászló két szomszédos sávja nem lehet azonos színű, vagy minden szint csak egyszer lehet felhasználni, stb./

Megfelelő konstrukciók előállításának minimális feltétele a minta és a szabályok, vagyis  $M_0$  és  $S$  helyes értelmezése, annak felfogása, hogy valójában mit is kell csinálni. Enélkül még egyetlen helyes konstrukció előállítása is csak véletlenszerű lehet. A tulajdonképpeni feladat pedig  $M_0$ -ból és  $S$ -ből konkrét konstrukciók,  $M_i$ -k származtatása és előállítása. Ez a származtatás és előállítás a művelet előtti szinten még egybefonódik, a felhasználásra kerülő elemeknek a minta elemeivel, valamint a készülő konstrukcióknak a mintával és a szabályokkal való folytonos összehasonlítása révén megy végbe. A művelet előtti szinten történő konstrukcióképzés legáltalánosabb sémáját a 17. ábrán látható módon foglalhatjuk össze.



Ez a séma, amint az ábráról is látható, nem vezet el az összes lehetőség előállításához, és nincs befejezése, nem lehet a végére jutni, csak abbahagyni. A művelet előtti szinten ugyanis nem lehet megadni annak a kritériumát, mikor nem lehet már többet csinálni.

Azt is megállapíthatjuk, hogy ezen a szinten a képesség még nem differenciálódik, bármilyen típusu konstrukciót kell előállítani, a működési séma ugyanaz: próbálgatás, a mintához és szabályokhoz való hasonlítás.

A hasonlításoknak legalább két formáját érdemes megkülönböztetni. Az egyik az elemi hasonlítás, elemeknek a páronkénti viszonyítása és ekvivalens vagy nem ekvivalens voltuknak a megállapítása. Ez történik például egy elemnek a minta elemeivel történő páronkénti összehasonlításánál. A hasonlítás másik típusa a globális hasonlítás, amikor két konstrukciót kell összehasonlítani, ekvivalens voltukat megállapítani. A hasonlításnak ez a típusa nem vezethető vissza az elemek páronkénti hasonlításainak egymásutánjára, mert itt a páronkénti hasonlítások összerendezettségére van szükség, és más mozzanatok, például sorrendiség, térbeli helyzet összehasonlítása is szerepet játszik.

A konkrét műveletek szintjén a konstrukciók előállítása során megjelennek a rendszeresség első elemei. Zárt, egybe rendezett, az összes konstrukciót közvetlenül előállító műveleti sémák még nem alakulnak ki, de konkrét dolgokhoz kötve, a konstrukciók tényleges, manipulativ előállításával és utólagos rendezésével már lehetséges az összes konstrukció előállítása.

A kombinativ képesség konkrét műveleti szintjének műkö-



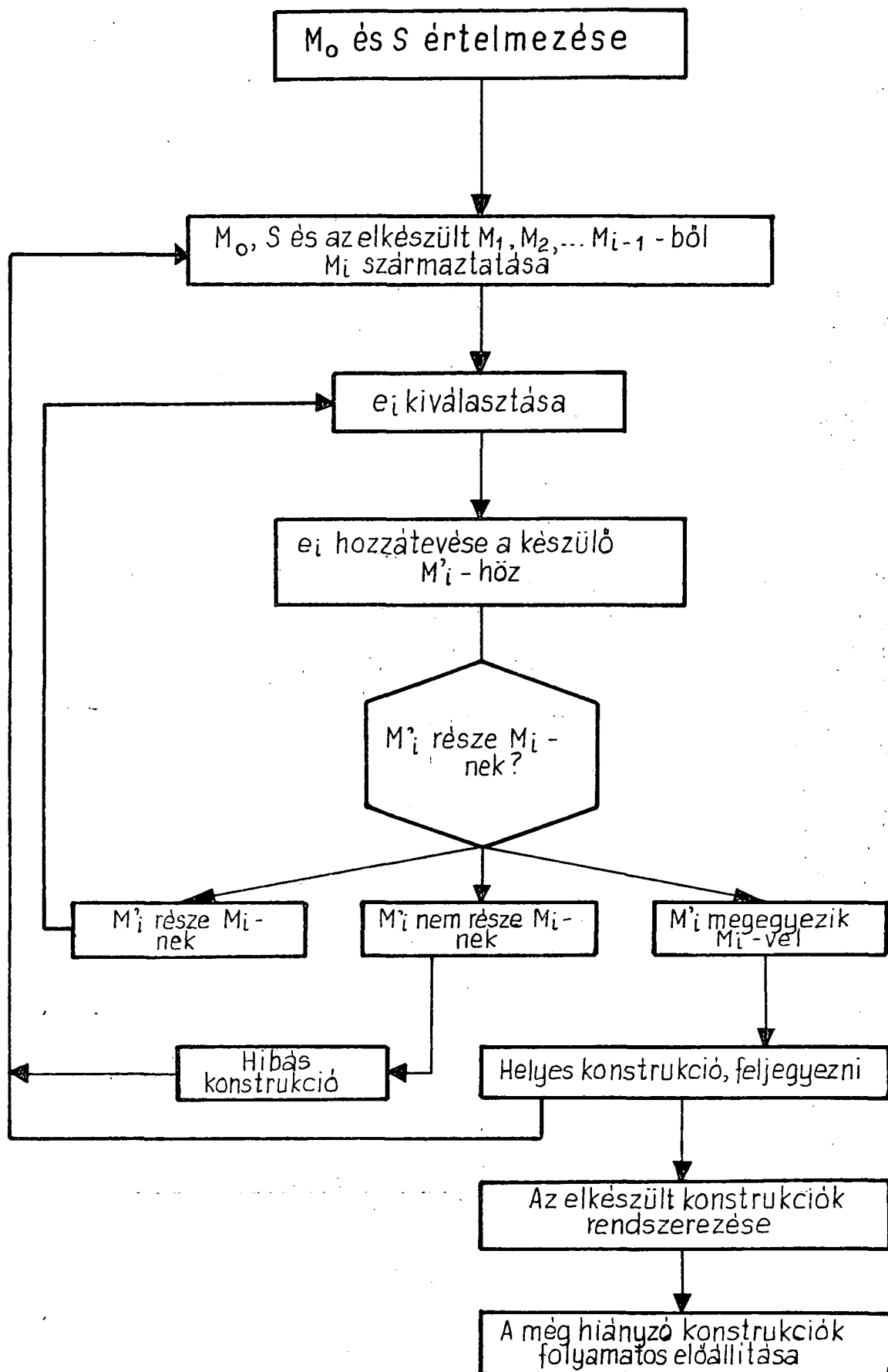
dését a 18. ábra alapján foglalhatjuk össze.

E szint megnyilvánulásaként értelmezhetjük mindazokat a jelenségeket, amelyek a rendszertelen próbálkozást meghaladják, de még nem alkotnak zárt, egységes egészként működő műveletet. Ezek közül a mozzanatok közül vegyük számba a fontosabbakat.

A konkrét műveletek szintjén már lehetséges a minta és a szabályok értelmezéséből egyes konkrét konstrukciók közvetlen származtatása. Vagyis a konstrukciók folytonos próbálgatással és hasonlításokkal történő összeállítása helyett vagy mellett valamilyen konkrét konstrukció megtervezése és közvetlen, "folyamatos" előállítása.

Ujabb konstrukciók származtatása azonban nem csak a minta és a szabályok értelmezésével történhet, hanem a már elkészült konstrukciók elemzésével is. /Pl. "ha van ilyen konstrukció, akkor kell lennie egy olyannak is..." típusu gondolatmenettel./ A konstrukcióknak az ilyen egymásból való származtatása történhet egyszerűen az elemek felcserélésével, különböző áthelyezésekkel, de lehetséges bonyolultabb, átfogóbb elvek alapján, például különböző szimmetriák, esetleg egyéb transzformációk felhasználásával. Valószínű, hogy itt kis számu, meghatározható, felkutatható származtatási módról van szó. Feltárásuk, számbavételük, vizsgálatuk igen fontos lenne, mivel valószínűleg olyan alkotóelemek ezek, amelyek a tágabb értelemben vett kombinatív képesség és más általános képességek felépítésében is részt vesznek, ez azonban már a későbbi munkák feladata.

A konstrukciók egymásból történő származtatásának módjait többször egymásután következetesen megismételve a konstrukciók egész sorozatait lehet előállítani, és ez az



előállítás már különböző rendszerezéseket is magában foglalhat. Ez egyben már a különböző rendszerezésekkel való próbálkozást is jelenti, ami egyre több konstrukció szisztematikus előállítását teszi lehetővé. Végül sor kerülhet a konstrukciók különböző rendszerezett csoportjainak az összevetésére, a rendszerezések egyesítésére, a teljes, az összes konstrukciót magában foglaló rendszerezés megtalálására. Ekkor már a rendszerezés vezet el a még hiányzó konstrukciók felismeréséhez és előállításához. A konkrét műveletek szintjén tehát a konstrukciók egy részének az előállítása szükséges a bennük megnyilvánuló rendszeresség felismeréséhez, a művelet tulajdonságainak az elvonatkoztatásához. Hogy a helyes rendszerezés megtalálásában hány konstrukció szükséges, az változó lehet. Ugyancsak változhat a konkrét műveletek szintjén való konstrukcióképzés során a rendszertelen próbálkozásoknak, az egyes konkrét esetek módszeres előállításának, a rész-rendszerezéseknek, a rendszerezésekkel való próbálkozásoknak az aránya, a 18. ábrán feltüntetett séma csupán a főbb mozzanatokot és ezek lehetséges sorrendjét szemlélteti.

A konkrét műveletek szintjén történő konstrukcióképzésnek, az új lehetőségek előállításának és a helyes rendszerezés felismerésének sok vonása analóg az intuitív gondolkodás bizonyos elemeivel. /Vagy lehet, hogy éppen az intuitív gondolkodás legelemibb formáját jelentik./ Az intuiciónak újabb értelmezései /pl.: Ponomarjov, J. 1968./ jelentősen csökkentik annak hagyományosan "misztikus", "megfoghatatlan" jellegét, remélhető, hogy a kombinatív képesség műveleti képességként való leírása és kutatása az intuiciónak jelenségének is újabb oldalait világítja meg. Itt ugyanis az újabb lehetőségek elő-

állításának, a rendszeresség felismerésének folyamata lépésről lépésre nyomonkövethető, értelmezhető.

A konkrét műveletek szintjén a képesség működési sémája az előállítandó konstrukciók típusa szerint lényegében még nem differenciálódik. Akár kombinációkat kell képezni, akár variációkat, akár egyéb konstrukciókat, az előállítás menete egyaránt a próbálgatásból, a konstrukciók egymásból való származtatásából áll. A különbség csak a végső rendszerezés tekintetében van. A helyes rendszerezés megtalálása viszont szintén a különféle rendszerezési lehetőségek közötti próbálkozás útján lehetséges, így a képesség működése lényegében a különböző rendszerezések megtalálása során is megegyezik.

A formális műveletek szintjén jelenik meg a műveletek szerinti differenciálódás. A formális szint és a konkrét műveletek szintjének működése között a legjellegzetesebb különbség az, hogy a formális szinten már nem az elkészített konstrukciókból jön létre a rendszerezés, hanem a "kész", kifejlett rendszerezési sémák állítják elő az összes lehetséges konstrukciót. Vagyis kialakulnak az egyes rendszerezési sémáknak megfelelő pszichikus szabályozási rendszerek, és ezeket a pszichikus rendszereket nevezzük kombinativ műveleteknek.

A formális műveletek szintjén a minta és a szabályok értelmezésével már nem egy-egy konstrukciónak, hanem közvetlenül az egész műveleti sémának, a lehetséges konstrukciók összességét előállító rendszerezésnek a származtatása történik. Vagy pontosabban: a problémahelyzethez a megfelelő pszichikus szabályozási rendszer /ha van ilyen és már kialakult/ hozzárendelése.

Ilyen értelemben a kombinativ műveleteket a kifejlett

komplex műveleti képesség részeinek tekinthetjük. A műveletek kialakulását értelmezhetjük Piaget megállapításának figyelembevételével: "Pszichológiailag ugyanis a műveletek olyan cselekvésekből erednek, amelyek interiorizációjuk során strukturákká rendeződnek." /Piaget, J. 1970. 223.o./ A kombinatív műveletekről tehát feltételezhetjük, hogy azok a korábbi szinteken megjelenő részek, a különböző hasonlítások, felcserélések, szimmetriák, a konkrét rendszerezési sémák sajátos egybeépülésével jönnek létre. A kifejezett kombinatív műveletekben mint egységként működő egészekben azonban ezek a részek már nem különíthetők el, a műveletek már minőségileg más pszichikus szabályozási rendszert képviselnek.

Ahogy Piaget vizsgálatai is bizonyítják, a kísérleti személyek formális szinten próbálgatás helyett valóban közvetlenül, módszeresen felsorolják az összes lehetőséget /A kísérletekkel kapcsolatban ld.: Piaget, J. 1967. 107.o.-121.o., illetve 1970. 331-332.o./.

A komplex műveleti képesség leírásának legfontosabb oldalát a részek, a műveletek számbavétele, teljes rendszerének feltárása jelenti. /Piaget csupán néhány speciális esetet vizsgál./

A kombinatív műveletek számbavételénél nem elég egyszerűen a matematikai összefüggések figyelembevétele. Az I. fejezet 3. pontja alapján megállapíthatjuk, hogy matematikai szempontból végtelen sok kombinatorikai műveletet értelmezhetünk. Még az ott számbavett fontosabb műveletekből is számtalan másikat származtathatunk azok különböző speciális eseteiként, vagy egymás utáni többszöri alkalmazásukkal.

A végtelen sok kombinatorikai művelet közül azonban nem lehet mindegyiknek kombinatív műveletet megfeleltetni. Figyelembe véve, hogy kombinatív műveletnek a részek sajátos egybeépülését az egységes egészként működő pszichikus rendszereket tekintjük, megállapíthatjuk, hogy a pszichikum működésének törvényei nagymértékben korlátozzák, behatárolják, hogy egyáltalán, elvileg milyen egybeépülések jöhetnek létre, milyen pszichikus rendszerek alakulhatnak ki. A két legfontosabb korlátozó tényező a művelet bonyolultsága és a művelet által kezelendő elemeknek a száma. A műveletek számbavételére, a korlátozó tényezők részletes elemzésére később fogok kitérni. Itt a kombinatív képesség fejlődési szintjeinek egységben látásához elég annak megállapítása, hogy a cselekvésekből egybeszerveződő pszichikus rendszerek csak a kombinatorikai problémák szűkebb körének megoldására lehetnek alkalmasak. Egy bizonyos bonyolultságon túl szükség van a műveletvégzés törvényszerűségeiről való gondolkodásra, a műveletek tulajdonságainak ismeretére vagy felismerésére, vagyis matematikai ismeretekre. Ez azonban már egy újabb szint, a tudatos műveletvégzés szintjének a működését jelenti.

A tudatos műveletvégzés szintjének működése ilyen módon több-kevesebb kombinatorikai tudást igényel. A kombinatorikai ismeretek elsajátításának nincsenek elvi akadályai vagy szűk határai, így a tudatos szinten megoldható problémák körének is csak a matematika aktuális fejlettsége szab elvi határt. Nyilvánvaló azonban, hogy itt már más jellegű, a kombinatív képesség másik három szintjével szerves egységet nem alkotó tudásról, matematikai ismeretekről, a matematikai formalizmus kezelésének a képességéről van szó. Ilyen értelemben

nem tekinthetünk minden kombinatorikai ismeretet a kombinatív képességhez tartozónak.

A tudatos műveletvégzés szintjéhez tartozó kombinatorikai ismeretek körülhatárolásánál talán akkor járunk el legkevésbé önkényesen, ha csak azokat az ismereteket tekintjük a kombinatív képesség részének, amelyek a formális szinten már kialakult műveletekre vonatkoznak és a műveletvégzéssel szerves kapcsolatban vannak. Ez az elhatárolás összhangban van azzal a közismert tapasztalattal, miszerint a kombinatorikai ismeretek megtanulása önmagában semmivel nem járul hozzá a kombinatív képesség fejlődéséhez.

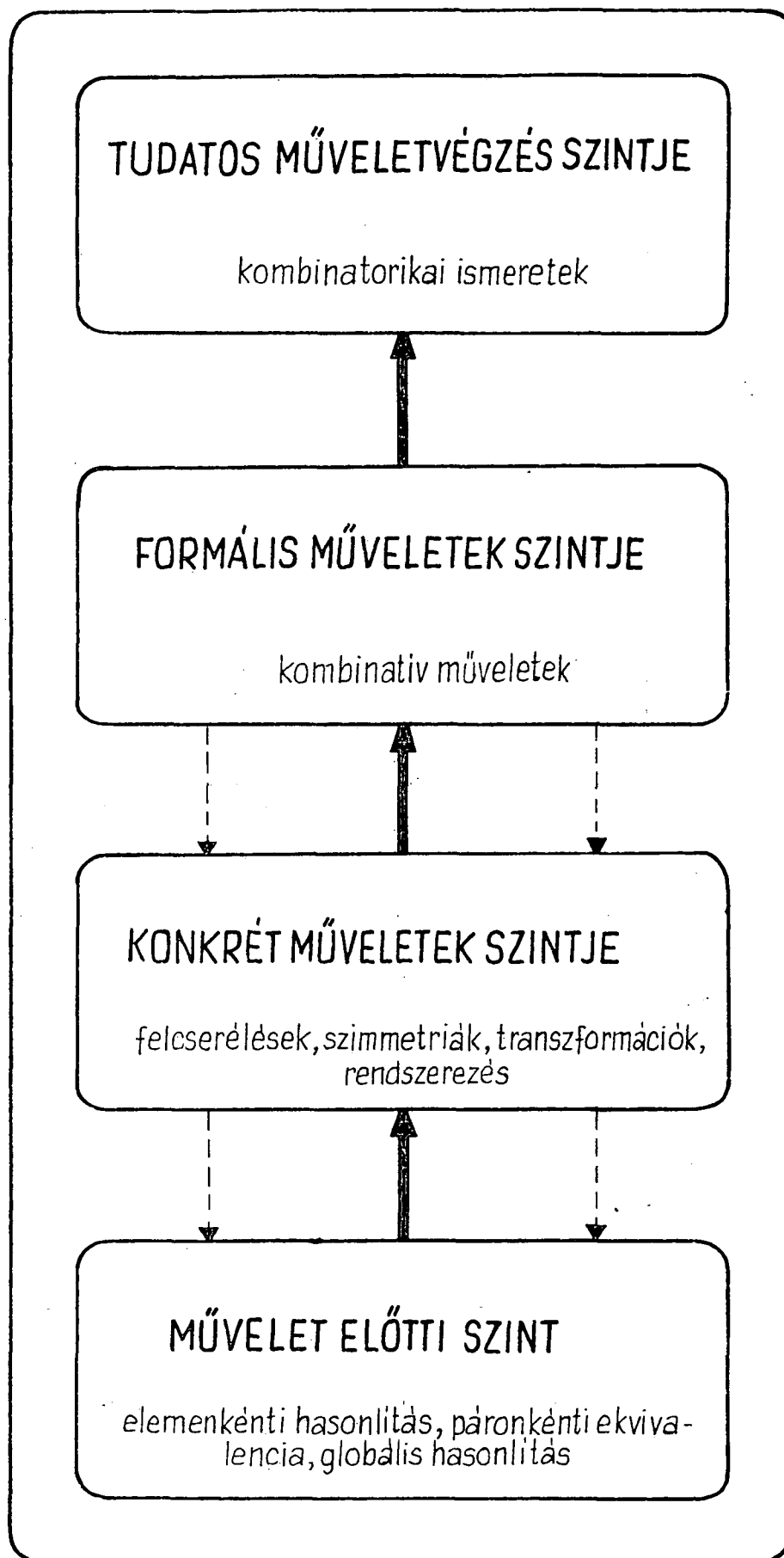
A tudatos szint az előző három szinthez képest még ezzel az értelmezéssel is speciális helyzetet foglal el a kombinatív műveleti képesség egészében. Amíg ugyanis a megelőző három szint valamilyen mértékben minden emberben kifejlődik, a tudatos szintet többnyire csak az oktatás biztosítja.

A teljesség és a képesség differenciált értelmezhetőségének érdekében azonban indokolt, hogy a kombinatív képesség fejlettségének, működésének ezt a szintjét is figyelembe vesszük. A tudatos szintnek vannak olyan mozzanatai, amelyek a formális szinten kialakult műveletek működési terét kiterjesztik. A műveletvégzés törvényeinek ismerete, a műveletvégzés tudatossá válása feloldja például az elemszám és a bonyolultság növelhetőségének korlátait.

Az egyes szintek jellemzése után most már megvizsgálhatjuk a kombinatív műveleti képességnek mint egésznek a kialakulását és működését /19. ábra/.

A kombinatív képességnek négy szintjét, négyféle működési módját különböztethetjük meg. A négy szint szorosan

## A KOMBINATIV MŰVELETI KÉPESSÉG MŰKÖDÉSI SZINTJEI





egymásra épül, a felsőbb szintek az előzőekből alakulnak ki, és egyben azokat magukban foglalják.

A képesség működésében megfigyelhetjük a "visszacsuszás"-nak vagy "eltolódás"-nak /décalage/ nevezett jelenséget, amit Stern és Piaget vizsgált először. A "visszacsuszás" tulajdonképpen a helyzet megoldása érdekében történő reverzibilis visszatérés a már túlhaladott fejlődési formákhoz.

Olyan feladatok megoldása során, amelyeknek megfeleltethető valamelyik kombinatív művelet, a képesség a művelet tudatos vagy "automatikus" működtetésében megnyilvánul. Ismeretlen problémák esetében azonban a képesség működése "visszacsuszhat" a konkrét műveletek szintjére vagy esetleg egészen a rendszertelen próbálkozásokig.

A kombinatív műveleti képességet a formális szint elérésével, a műveletek megjelenésével tekinthetjük kialakultnak, figyelembe véve a tudatos szint speciális jellegéről korábban elmondottakat. Így a kifejezett műveleti képesség részeinek leírása a kombinatív műveletek rendszerének a feltárását jelenti.

### A kombinatív műveletek

Az előzőekben megállapítottuk, hogy kombinatív műveleteknek azokat az egységes egészként működő pszichikus szabályozási rendszereket nevezzük, amelyek működése adott esetben az összes lehetséges konstrukció előállításában nyilvánul meg.

A kombinatív műveletek számbavétele ezek alapján ugye lehetséges, hogy megvizsgáljuk, melyik kombinatorikai műveletek-

ből, illetve ezek milyen egybeszerveződéseiből származtathatunk kombinatív műveletet. A műveletté szerveződés feltételeit a kialakulás folyamatának és az emberi információfeldolgozás és tárolás, vagyis a pszichikum kognitív szférájának jellemzőiből vezethetjük le. /Az emberi információfeldolgozással és tárolással kapcsolatos legújabb kutatások eredményeiről ld.: Norman, D. 1976./

A kombinatorikai műveleteknek, pontosabban a műveleteknek megfelelő konstrukciók képzésének egy tevékenységrendszert, egy cselekvéssorozatot feleltethetünk meg. Ez a cselekvés-sorozat bármilyen hosszú lehet. Ezekből azonban nem szerveződhet bármennyi egybe egységes kombinatív műveletté. Az egybeszerveződésnek mennyiségi határt szab többek között a rövid távu memória kapacitása. Az egybeszerveződés mennyiségi korlátait a hierarchikus elrendeződés oldja fel: kevés számú elem egybeszerveződése alkotnak egységeket, amelyek ezután újabb, nagyobb egységekké állnak össze. A pszichikus rendszerek ilyen hierarchiájának egy bizonyos szintjén megjelennek a kombinatív műveletek. E szint alatt a cselekvések sorozatai még nem tekinthetők kombinatív műveleteknek, egy bizonyos bonyolultságon túl viszont már nem egy műveletet alkotnak, hanem műveletek sorozatát.

A kérdést tehát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a pszichikus rendszerek hierarchiájának azon a szintjén, ahol a kombinatív műveletek megjelennek, milyen bonyolultsági fokot érhetnek el. A pszichikus törvényekkel, a műveletvégzés bonyolultságának más megfontolások alapján történő felosztásával /Nagy, J. 1968./, a kombinatorikai műveletek csoportosításával

és a mindennapi tapasztalattal egyaránt összhangban áll az, ha a kombinatorikus műveletek háromféle bonyolultságát különböztetjük meg: az elemi, az egyszerű és az összetett bonyolultsági fokot.

A műveletek számbavételéhez még egy kérdést kell tisztáznunk: mit értünk kombinatorikus műveletek azonosságán és különbözőségén. A műveletek rendszer-felfogásával összhangban két műveletet akkor tekinthetünk azonosnak, ha strukturájuk és működésük megegyezik.

Az elemzett szempontok figyelembevételével elemi kombinatorikus műveletnek azt a műveletet tekinthetjük, amelyik egész-ként működve még meghatározott feltételek mellett az összes konstrukciót előállítja, részei azonban már nem rendelkeznek a kombinatorikus műveletek ilyen tulajdonságával. Ez a kombinatorikus műveletek legegyszerűbb csoportjának megfelelő, a fa alakú gráf segítségével képezhető konstrukciókat előállító művelet lesz. Amint az I. fejezet 3. pontjában megállapítottuk, az ismétlés nélküli permutációk, az ismétlés nélküli variációk, az ismétléses variációk és a Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukciók képzésének mechanizmusa megegyezik, így e négy kombinatorikus műveletnek egyetlen pszichikus rendszert, egy kombinatorikus műveletet feleltethetünk meg. A négyféle konstrukció előállítását ugyanannak az elemi műveletnek különböző feltételek mellett megvalósuló működéseiként értelmezhetjük. Annak eldöntése, hogy különböző feltételek hogyan befolyásolják a művelet működését, az empirikus vizsgálatok feladata lesz.

Az egyszerű kombinatorikus műveletet azokból a kombinatorikus műveletekből származtathatjuk, amelyeknek a szerkezetében

a fa alaku gráffal történő konstrukcióképzést és az osztályozást különíthettük el. Így egyszerű kombinatív művelettel képezhetjük az ismétlés nélküli kombinációkat, az ismétléses permutációkat és egyéb olyan konstrukciókat, amelyeket a konstrukciók valamely tágabb köréből osztályozással származtathatunk.

Itt ismét ki kell térnünk arra a lehetőségre, amire a kombinatorikai műveleteknél már utaltunk, hogy a műveletvégzés során az osztályozás egybefonódhat a konstrukciók előállításával. A képesség működésére ez a megállapítás még inkább érvényes. A kialakult műveletek végzésekor előfordulhat a részek teljes egybeolvadása, az összes konstrukció közvetlen felsorolása.

Feltételezhetjük, hogy az egyszerű kombinatív művelet nem egyformán működik a kombinációk képzésekor, és valamilyen más, speciális esetben, amikor ugyancsak a fa alaku gráf és az osztályozás alkalmazására van szükség. Ilyen esetekben nyilvánulhat meg a "visszacsuszás" jelensége. Az egyszerű művelet már kialakult /és a kombinációk képzésére működik formális szinten/, de ismeretlen problémák megoldása csak a konkrét műveletek szintjén, a konstrukciók tényleges előállításával és osztályozásával lehetséges.

Összetett kombinatív műveleteket az elemi és az egyszerű kombinatív műveletekből egybeszerveződésükkel származtathatunk. Valószínű azonban, hogy az egybeszerveződések lehetősége itt rendkívül korlátozott.

Egy összetett műveletet már korábban vizsgáltunk, ez pedig a halmaz részhalmazainak képzése, vagyis az összes lehetséges elemszámu kombináció előállítása. Az egybeszerveződés

lehetőségére is utaltunk, azonban külön érdemes kiemelni a kombinációképzés egymás utáni elkülönült elvégzésének és az összes részhalmaz együttes képzésének a különbségeire.

Az egybeszerveződés természetesen nem a háló struktúra tulajdonságainak ismeretét, nem is a metszés és az egyesítés műveleteinek tudatos alkalmazását jelenti, hanem azt, hogy a kombinációk előállításának és osztályozásának hosszadalmas utjai lerövidülhetnek, és ez a lerövidülés éppen annak a lehetőségnek felel meg, mintha a konstrukciókat háló struktúrába rendezve képeztük volna. /Előfordulhat azonban, hogy ilyenkor a konstrukciók képzését és rendszerezését egymásból történő olyan származtatásuk biztosítja, ami az egyesítés vagy a metszés műveleteinek felel meg. De ez csak feltételezés, amit azonban érdemes lenne kísérletileg is vizsgálni./

Piaget szerint a formális gondolkodás kialakulása annak következménye, hogy a gyermek képessé válik az ítéletek kombinálására. Az ítéletek kombinálásában éppen az összes részhalmaz képzésének művelete jelenik meg. Ha elfogadjuk, hogy az ítéletek kombinálásában megfigyelhető ez a művelet, akkor működni kell a dolgok kombinálásában is.

Igy indokolt, hogy a halmaz összes részhalmazának képzéséről feltételezzük, hogy az kombinatív műveletként is kialakul.

Ha elfogadjuk ilyen bonyolultságu kombinatív művelet kialakulásának lehetőségét, az elemi műveletből még két másikat is képezhetünk.

Értelmezhetjük  $n$  elemből az összes lehetséges hosszúságu ismétlés nélküli variáció képzését. /Ez természetesen az ismétlés nélküli permutációkat is magában foglalja./ Részekre bontva ezt a műveletet az  $1, 2, \dots, n$  elemből álló variá-

ciók egymásutáni képzéseként írhatjuk le. Annak eldöntése, hogy ezek milyen egybeépüléséről beszélhetünk, szintén kísérleti feladat. Mivel az egész művelet, az összes konstrukció képzése egyetlen fa alaku gráffal leírható, valószínű, hogy az egybeszerveződés valóban létrejön.

Hasonló módon származtathatunk összetett műveletet az ismétléses variációk képzéséből. Ezzel  $n$  elemből az  $1, 2, \dots, k$  hosszúságú ismétléses variációk összessége képezhető. Itt  $k$ -nak nincs felső határa, bármekkora,  $n$ -nél nagyobb is lehet. A gyakorlati problémák esetében, különösen azokban, amelyek a formális szinten működő kombinatív képesség számára is hozzáférhetők, általában  $k$  nem sokkal nagyobb, mint  $n$ . Feltelezhetjük, hogy a képesség működését az az eset jól reprezentálja, amikor  $k = n$ , vagyis  $n$  elemből az összes legfeljebb  $n$  hosszúságú ismétléses variációk képzését kell elvégezni.

A felsorolt három összetett művelet közül az első, a halmaz részhalmazainak képzése az egybeszerveződés lehetőségeit, a működési mechanizmust tekintve nyilvánvalóan különbözik a másik kettőtől.

Az összes különböző elemszámu ismétlés nélküli variáció és az összes különböző elemszámu ismétléses variáció képzésének művelete között már több a hasonlóság. A velük előállítható konstrukciók száma azonban /azonos számu elemből/ olyan nagymértékben különbözik, hogy az a kialakulás folyamatát is befolyásolhatja. Így indokoltnak tűnik, hogy ezeket két különböző összetett műveletnek tekintsük. A műveletek azonosságának és különbözőségének eldöntése végső soron kísérleti feladat. Ugyanez vonatkozik az elemi és az egyszerű műveletre,

illetve azok különböző esetekben való működéseire is.

Az összetett műveletek esetében a felhasználható elemek számának emelkedésével a képezhető konstrukciók száma igen gyorsan növekszik. Így előfordulhat, hogy csak egyes, konkrét számú elemnek megfelelő műveletek alakulnak ki az általános műveleti sémák nélkül. Erre a kérdésre az elemszám vizsgálatánál fogok visszatérni.

Összegzésként megállapíthatjuk, hogy háromféle bonyolultságu kombinatív műveletet különböztetünk meg, ezen belül is egy elemi, egy egyszerű és három összetett műveletet. A hagyományos kombinatorikai műveletek közül az ismétlés nélküli permutációk, az ismétlés nélküli variációk, az ismétléses variációk és a Descartes-féle szorzat képzésének megfelelő műveletet az elemi kombinatív művelet változatainak tekintjük, az ismétlés nélküli kombinációk képzését és az ismétléses permutációk képzését az egyszerű művelet változataiként értelmezzük, az összetett műveleteket pedig az ismétlés nélküli kombinációk, az ismétlés nélküli variációk és az ismétléses variációk képzésének általánosításával származtatjuk.

Ezzel a rendszerezéssel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, lehet-e a kombinatív műveletek másfajta rendszerét is értelmezni? Bizonyosan másfajta származtatás és műveleti rendszer is elképzelhető, a mindennapi cselekvéseknek, a kombinatorika jelenlegi felépítésének, az iskolai kombinatorikatanítás jelenlegi helyzetének és pszichológiai megfontolásoknak a figyelembevételével azonban feltételezhetjük, hogy ezeknek a műveleteknek a belsővé válása, pszichikus rendszerre szerveződése a legvalószínűbb. Ezt a műveleti

rendszer azonban csak az empirikus vizsgálatok kiindulásának, elméleti megalapozásának tekinthetjük, kiegészítése, módosítása ugyancsak kísérleti eredmények értékelése alapján történhet.

### A műveletvégzés során kezelendő elemek száma

A műveletvégzés során kezelendő elemek száma a műveletek kialakulását, kialakíthatóságát és a műveletek működését egyaránt befolyásolja.

A műveletvégzés során három számszerű jellemzőnek az értékei játszhatnak szerepet: a konstrukciók elkészítéséhez felhasználható összes elem száma, az egy konstrukcióhoz felhasználandó elemek száma és az elkészíthető összes konstrukciók száma.

A kombinatorikai ismeretek megtanulása után, a műveletvégzés általános törvényeinek ismeretében az előbbi jellemzők számértékeinek növekedése a műveletvégzést nem befolyásolja, a matematikai formulák és szabályok a kis és nagy számértékekre egyaránt érvényesek. Ha azonban a műveletek a cselekvések egybeszerveződéséből alakulnak ki, ezek a számértékek nem lehetnek akármilyen nagyok.

Már a konstrukciók tényleges előállításának idő- és munkaigénye is korlátozza az elemek számának a növelhetőségét. Valószínű, hogy 30-nál több konstrukció előállítására a gyakorlati cselekvések vagy a tervszerű iskolai oktatás során is csak kivételesen kerül sor, sőt még ez az érték is tulságosan tág becslésnek tűnik.



Ha azonban a cselekvések egybeszerveződésének szempontjait vesszük figyelembe, még ennél is kevesebb lehetőséggel kell számolnunk. A korlátozás a rövidtávu memóriánk /short-term memory/ kapacitásának behatároltságából adódik.

A rövidtávu memória szerepe az információk ideiglenes tárolása, melyek azután elfelejtődnek, vagy megerősítés után a tartós memóriába kerülnek. A rövidtávu memória kapacitásának méreteire és működésére G.A. Miller hívta fel a figyelmet híres tanulmányában. /Miller, G.A. 1956., ismerteti: Norman, D. 1976. 89.-94.o./ A jelenség lényege az, hogy egyszerre  $7 \pm 2$  dolgot tudunk megjegyezni, függetlenül attól, hogy ezek a dolgok egyenként milyen bonyolultak, mennyi az információtartalmuk. A  $7 \pm 2$ -es határ létezését azóta kísérletileg sokszorosan megerősítették és figyelembevételével egyre újabb és újabb jelenségek válnak értelmezhetővé.

A számtalan hasonló helyzetben megfigyelt törvényszerűség alapján feltételezhetjük, hogy a konstrukciók képzésében is valahol a  $7 \pm 2$  körül van az a határ, ami alatt még együtt tudjuk érzékelni a konstrukciókat, tulajdonságaikat, közös vonásaikat, és ami fölött kezdenek csak egyenként vizsgálható tagolatlan, áttekinthetetlen összességgé egybefolyni. Ennyit tudunk egyszerre, együttesen kezelni.

Ennek alapján érdemes megvizsgálni a kombinatorikai műveletek mennyiségi jellemzőit. A kérdés az, hogy ezeken a mennyiségi határokon belül a műveletek milyen konkrét számértékkel jellemezhető feladatokban működhetnek. Ezeket a számszerű jellemzőket a 2., 3., 4. és 5. táblázat alapján tekinthetjük át.

A táblázatokból azonnal látszik, hogy milyen kevés, szám-

## 2. táblázat

Kombinatorikai műveletekkel előállítható konstrukciók száma

művelet	konstrukciók hossza	a felhasználható különböző elemek száma					
		n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
ismétlés nélküli permutációk képzése	$k = n$	1	2	6	2	120	720
ismétlés nélküli variációk képzése	$k = 1$	1	2	3	4	5	6
	$k = 2$	-	2	6	12	20	30
	$k = 3$	-	-	6	24	60	120
	$k = 4$	-	-	-	24	120	360
	$k = 5$	-	-	-	-	120	720
ismétléses variációk képzése	$k = 1$	1	2	3	4	5	6
	$k = 2$	1	4	9	16	25	36
	$k = 3$	1	8	27	64	125	216
	$k = 4$	1	16	81	256	625	
	$k = 5$	1	32	243			
ismétlés nélküli kombinációk képzése	$k = 1$	1	2	3	4	5	6
	$k = 2$	-	1	3	6	10	15
	$k = 3$	-	-	1	4	10	20
	$k = 4$	-	-	-	1	5	15
	$k = 5$	-	-	-	-	1	6

## 3. táblázat

Az ismétléses permutációk képzésével előállítható konstrukciók száma

Konstrukciók hossza	a lehetséges feladatváltozatok és a változatokkal előállítható konstrukciók száma				lehetséges feladatváltozatok száma
$n = 2$	-				-
$n = 3$	$\frac{3!}{2!} = 3$				1
$n = 4$	$\frac{4!}{3!} = 4$	$\frac{4!}{2!} = 12$	$\frac{4!}{2!2!} = 6$		3
$n = 5$	$\frac{5!}{3!} = 20$	$\frac{5!}{4!} = 5$	$\frac{5!}{2!2!} = 30$	$\frac{5!}{2!3!} = 10$	4
$n = 6$	$\frac{6!}{5!} = 6$	$\frac{6!}{2!4!} = 15$	$\frac{6!}{3!3!} = 20$		3
$n = 7$	$\frac{7!}{6!} = 7$		$\frac{7!}{2!5!} = 21$		2

megj.: a táblázatban a 30-nál több konstrukciót előállító változatok nem szerepelnek.

## 4. táblázat

A Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukciók száma

Konstr. hossza	az egyes halmazok elemeinek a száma		az összes elem száma	az előállítható konstr. száma	Konstr. hossza	az egyes halmazok elemeinek a száma		az összes elem száma	az előállítható konstr. száma
2	2	2	4	4	2	3	9	12	27
	2	3	5	6		3	10	13	30
	2	4	6	8		4	4	8	16
	2	5	2	10		4	5	9	20
	2	6	8	12		4	6	10	24
	2	7	9	14		4	7	11	28
	2	8	10	16		5	5	10	25
	2	9	11	18		5	6	11	30
	2	10	12	20	3	2	2	2	8
	2	11	13	22		2	2	3	12
	2	12	14	24		2	2	4	16
	2	13	15	26		2	2	5	20
	2	14	16	28		2	2	6	24
	2	15	17	30		2	2	7	28
	3	3	6	9		2	3	3	18
	3	4	7	12		2	3	4	24
	3	5	8	15		2	3	5	30
	3	6	9	18		3	3	3	27
3	3	7	10	21	4	2	2	2	8
	3	8	11	24		2	2	3	9

## 5. táblázat

Az összetett műveletekkel előállítható konstrukciók száma

művelet	felhasználható elemek száma	az előállítható konstrukciók száma				
halmaz rész-halmazainak képzése	1	2				
	2	4				
	3	8				
	4	16				
	5	32				
az összes különböző elem-számu ismétlés nélküli variáció képzése	1	1				
	2	4				
	3	15				
	4	64				
	5	325				
az összes különböző elem-számu ismétléses variáció képzése	1	1	2	3	4	5
	2	2	6	14	30	62
	3	3	11	38		
	4	4	2	84		
	5	5	30			
konstrukciók maxim. hossza →		1	2	3	4	5

értékekben különböző feladatot lehet készíteni, míg a tágabb 30-as keretet figyelembe véve is. Egyedül a Descartes-féle szorzatoknak megfelelő konstrukciók esetében van lehetőség a számértékek gazdagabb variálására.

A táblázatban a matematikai értelemben lehetséges változatok szerepelnek, ezek közül azonban nem mindegyiknek felel meg a kombinatorik tevékenység. /Például 1 elemből nem lehet variációt képezni, bár matematikailag ez az eset is értelmezve van./ Ha csak azokat a számértékeket vesszük figyelembe, amelyekkel olyan feladatot lehet szerkeszteni, hogy az a művelet általános sémájának a működését igényelje, egészen kevés lehetőséget kapunk. A műveletekkel kapcsolatban szerkeszthető, számértékekben különböző feladatok számát a 6. táblázat foglalja össze.

#### 6. táblázat

A műveleteknek megfelelő, számértékekben különböző feladatok száma

művelet	a számértékekben különböző feladatok száma	
	legfeljebb 9 konstrukció előállításával	legfeljebb 30 konstrukció előállításával
ismétlés nélküli permutációk képzése	2	3
ismétlés nélküli variációk képzése	1	5
ismétléses variációk képzése	3	7
a Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukciók képzése	5	40
ismétlés nélküli kombinációk képzése	5	10
ismétléses permutációk képzése	6	13
összes részhalmaz képzése	2	3
összes különböző elemszámú ismétlés nélküli variációk képzése	1	2
az összes különböző elemszámú ismétléses variáció képzése	1	6

A Miller féle  $7+2$  felső határát, a legfeljebb 9 konstrukciót előállító, illetve a legfeljebb 30 konstrukciót előállító, a kombinatív tevékenység megnyilvánulását is igénylő feladatokat véve figyelembe csak három művelet esetében, az ismétlés nélküli kombinációk, az ismétléses permutációk és a Descartes féle szorzatok esetében lehetséges viszonylag sokféle, 5 illetve 6 számértékeiben különböző feladat.

Most ismét feltehetjük a kérdést, ha vannak is olyan cselekvések, amelyekből a kombinatív műveletek kifejlődhetnek, vajon ezek a tevékenységek, tekintettel a rendkívül korlátozott számszerű lehetőségekre, tudnak-e olyan matematikai változatosságot biztosítani, ami a közös vonások kiemelését, az empirikus általánosítást lehetővé teszi. Joggal feltételezhetjük, hogy az a "kombinatorika", aminek kialakulását Piaget a formális műveletek megjelenésével egy időre tesz, illetve amivel éppen a formális gondolkodás kialakulását jellemzi, nem lehet műveletekre differenciált, legfeljebb egy vagy két általános sémát foglalhat magába. A legvalószínűbb két séma a Descartes-féle szorzatok képzésének az általánosításával kialakuló elemi művelet, ami esetleg a variációk és permutációk képzésére is működik, illetve az ismétlés nélküli kombinációk képzése. A bonyolult műveletek esetében legfeljebb egy-egy, konkrét számértékekhez kötött műveleti séma alakulhat ki.

Valószínű azonban, hogy a cselekvések olyan változatosságát, ami egyáltalán a sémák differenciálódásához vezet, csak a tervszerű oktatás biztosítja. Az is kétséges, hogy csak cselekvések által, a műveletek törvényszerűségeinek,

tulajdonságainak közlése nélkül minden egyes felsorolt műveletet ki lehet alakítani.

### A művelet működésének és a tartalomnak a kapcsolata

A tartalom problémája látszólag nem tartozik a kombinatív képesség strukturájának, működésének a vizsgálatába, hiszen a képesség kifejelettsége azt jelenti, hogy a konkrét tartalomtól független, minden tartalmon egyaránt működik. A műveleti séma kialakulását, belsővé válását éppen azzal jellemezhetjük, hogy elszakad a konkrét helyzetektől, nem kapcsolódik szorosan a művelet tárgyához.

Ahhoz azonban, hogy a megfelelő pszichikus rendszer működhessen, először is fel kell ismerni a művelet alkalmazhatóságát, a kombinatív képesség működésekor meg kell látni a probléma "kombinatív lényegét".

A gyakorlati problémák és a mesterségesen kitalált feladatok is több-kevesebb zajt tartalmaznak. Zajon általános értelemben a probléma lényegéhez nem tartozó, felesleges, zavaró vonások összességét értjük. E zajos háttérben, környezetben először fel kell ismerni a voltaképpeni feladatot, és csak azután kerülhet sor a művelet alkalmazására. A felismerés azonban már más képességek működését, talán éppen valamilyik általános képességünk működését igényli /Skemp, R. 1975. 36.o./. A képességek e bonyolult összekapcsolódása is indokolja, hogy a tartalom-zaj problémájával foglalkozzunk.

Hogy egy feladatban mennyi a zaj, az sok mindentől függ,

a tartalom ismerőssége, a konkrét szituáció mind befolyásolja a zaj mennyiségét. A pszichológiai vizsgálatok sokféleképpen próbálták megoldani a zaj és a tartalom problémáját, rendszerint a tartalom "lecsupaszításával", egészen addig, amíg csak a puszta struktúra, művelet marad vissza. Ez az út azonban elvileg is járhatatlan, és ennek más, mélyebb okai vannak.

A kombinatorikus képesség fejlődési szintjeinek elemzése során megállapíthattuk, hogy a műveletek kialakulásakor sok egyszerűbb pszichikus rendszer /hasonlítások, felcserélések, szimmetriák, stb./ szerveződik egybe. Az ott kiemelt egyszerűbb képességek azonban csak a kombinatorikus műveletek szempontjából, a kombinatoricitás oldaláról a legjellemzőbb elemek. Azokon túl a kombinatorikus képesség kifejlődésében sok más mozzanat, például a térbeliség, a sorrendiség, a számosság érzékelésének képessége is szerepet játszik, ezek az alkotóelemek is "beépülnek" a kombinatorikus képességbe. Bármilyen tartalmon vizsgáljuk is a kombinatorikus műveletek működését, e képességek közül néhánynak, vagy mindegyiknek a fejlettsége szerepet játszik.

Mivel mindenféle művelet csak valamilyen tartalmon működhet, a tartalomtól való elszakadás kísérletei csak arra vezetnek, hogy a természetes, adekvát tartalom helyett a képesség inadekvát, nem természetes tartalmon működik. A tartalom problémája csak úgy oldható meg, hogy nem "kiküszöbölni" igyekezzünk, hanem figyelembe vesszük, eleve számolunk vele.

A kombinatorikus műveletek működésével kapcsolatban a művelet/zaj sokféle arányát hordozó tartalom fordulhat elő.

A széles skálából azért mégis érdemes három diszkrét pontot kiemelni.

Az egyik szélső esettel akkor találkozunk, amikor a zaj kevés, a kombinatorikai tartalom meglehetősen világos. Erre lehet példa a tárgyakból egyszerű konstrukciók tényleges előállítását igénylő feladat.

A középső csoportba sorolhatjuk azokat a problémákat, amelyekben a zaj némileg elfedi a kombinatorikai lényegét, de a művelet és a zaj közül egyik sem domináns. Ilyen például Piaget kísérlete, melynek során a vegyszereket kellett kombinálni /Piaget, J. 1967. 107-120.o./.

A másik szélsőséget azok a problémák jelentik, amelyekben a zaj dominál, teljesen elfedi a kombinatorikai tartalmat. Ilyenkor már más képességek működése is döntően, esetleg a kombinatív képességnél sokkal nagyobb mértékben hozzájárul a probléma sikeres megoldásához.



#### 4. A KOMBINATIV KÉPESSÉG ÉS A KÉPESSÉGEK RENDSZERE

A kombinativ képesség gondolkodásbeli szerepének elemzése meglehetősen komplex feladat, és egy hosszabb tanulmány sem lenne elegendő valamennyi oldal részletes megvizsgálására.

Már a helyes megközelítési mód megválasztása sem egyszerű, és szinte lehetetlen olyan rendezőelvet találni, amelynek segítségével minden fontos mozzanatot szemügyre vehetnénk. Ezért a következőkben csak néhány fontos összefüggésre fogok rámutatni, a teljesség lehetősége nélkül.

Hogy azért mégis valamilyen logikai sorrendet tarthassunk, a gondolatokat egységes keretbe foglalhassuk, hívjuk ismét segítségül a rendszerszemléletet, és haladjunk valamilyen feltételezett hierarchikus elrendeződést követve az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé.

E megközelítési mód értelmében a kombinativ képesség és a gondolkodás kapcsolatának a képességek rendszerébe való beépülésének három oldalát, háromféle lehetőségét kell megvizsgálnunk. Foglalkoznunk kell a kombinativ képesség és más képességek részeinek a kapcsolatával, a rendszerbeépülés olyan lehetőségeivel, amikor a kapcsolódása közös részeken, építőelemeken keresztül történik. A második lehetőséget az jelenti, hogy a kombinativ képesség egészként, egybeépült pszichikus szabályozási rendszerként vesz részt a gondolkodási folyamatokban, egészként kapcsolódik más képességekhez. A harmadik lehetőség az általános képességekbe való beépülés,

amikor a kombinatív képesség valamilyen más képességnek a részét képezi. Természetesen ezek az oldalak a valóságban szorosan összefonódnak, szétválasztásuk még az elemzés szintjén sem mindig lehetséges.

Mivel más képességek kialakulási folyamatának, felépülésének, a részek, elemek egybeszerveződésének elemzésével nem foglalkoztam, a kombinatív képességnek és más képességeknek a részekben keresztül megvalósuló kapcsolataira, az ilyen kapcsolatok lehetőségére és ezek megismerésének fontosságára csak néhány példával tudok utalni.

A kombinatív tevékenység művelet előtti formájában megjelenik a páronkénti hasonlítás, két-két elem ekvivalens voltának a megállapítása. A konkrét műveletek szintjén már az ekvivalenciareláció teljes működésére, a konstrukciók osztályozására van szükség. Így az ekvivalencia-reláció használatának képessége a kombinatív képességben, a kombinatív képességgel együtt fejlődik. Másrészt az ekvivalenciareláció kialakulása - mint azt Piaget megállapítja - együttjár a relációtulajdonságok, valamint az egyenlőtlenség és más relációk, a különböző soralkotások, sorrendi struktúrák kifejlődésével.

Egy másik komplex képességnek, a rendszerezés képességének a részeit is felismerhetjük a kombinatív képesség működésében. Valószínű, hogy a különböző részrendszerezések megalkotása a kombinatív képességben feltárt műveleteken kívül egy másik irányba is továbbfejlődik, a rendszerezési képesség műveleteinek kialakulásához vezet.

Már e két példa alapján is feltételezhetjük, hogy a különböző műveleti képességek, mint amilyen a kombinatív mű-

veleti képesség, vagy a rendszerezési képesség, egy képességrendszert alkotnak, ami véges számú építőelem kapcsolódásából épül fel. Ennek a képességrendszernek a feltárása, az alapelemek megismerése, a kialakulás folyamatának feltárása lehetővé tenné a képességek optimális ütemű és arányú kifejtését.

A kombinatív képesség egészként való működésének más képességekkel való kapcsolatai közül a logikai képességek kialakulásában betöltött szerepét kell elsőként kiemelni.

A logikai képességek működését átszövik a kombinatív képesség különböző megnyilvánulásai. Már a logikai műveletek működése is impliciten magában foglalja az elemi kombinatív műveletet, de az egész műveleti rendszert is a kombinatorika foglalja egységbe.

Piaget a formális gondolkodás kialakulását, a formális szint elérését a 16 kétváltozós ítéleti művelet megjelenésével jellemzi. A 16 kétváltozós ítéleti művelet Piaget szerint úgy alakul ki, hogy a gyermek a tárgyak kombinálása során elsajátított sémákat az ítéletekre alkalmazza. Az ítéleti műveletek rendszere a két alapvető strukturát, a csoportot és a hálót foglalja magában. A háló struktúra a különböző soralkozási, csoportosítási, osztályozási strukturák és a kombinációs sémák egyberendeződésének eredményeként jön létre.

A szűkebb és tágabb értelemben vett kombinatív képesség mindennapi tevékenységünkben megnyilvánuló működéseinek feltérképezése messze vezetne. Valószínű, hogy a kombinatorikának az objektívált tudás rendszerében elfoglalt helye és a kombinatív képességnek a tevékenységek rendszerében betöltött sze-

repe között sok távoli analógiát fedezhetünk fel. Így a kombinatorika sokféle alkalmazási lehetőségének megtaláljának valamilyen egyszerű megfelelőjét a mindennapi tevékenységeinkben. A játékelméletnek például megfeleltethetjük tevékenységeink "stratégiáinak" megtervezését. Cselekedeteinket a lehetőségek számbavétele és mérlegelése éppugy jellemezheti, mint a megszokás. A megszokás és mérlegelés optimális aránya a kombinatív képesség megfelelő fejlettsége nélkül nem alakulhat ki.

A tágabb értelemben vett kombinatív képesség megnyilvánulásának egyik legfontosabb területe a nyelv használata. Amikor írunk, vagy beszélünk, nem teszünk mást, mint szavak összességéből, szókincsünkből bizonyosakat kiválasztunk és belőlük sorozatokat alkotunk. A létrehozható változatok számát a kifejezendő tartalom és a nyelvtani szabályok korlátozzák, e tág korlátokon belül azonban sokféle összeállítás lehetséges. A választékosságnak, a kifejezés gazdagságának feltétele<sup>a</sup> a tartalom és a nyelvtani szabályok által megengedett többféle lehetőség megalkotásának képessége.

Harmadikként azt a lehetőséget kell megvizsgálnunk, hogy a kombinatív képesség részként beépülhet az általános képességekbe. Az ilyen lehetőségek feltárása sem könnyű, mivel az általános képességek meghatározása, leírása, értelmezése a pszichológiában nem egységes. Így a legtöbbet vizsgált és vitatott általános képességek közül is csak hármat fogok ilyen szempontból kiemelni: a gondolkodóképességet, a fantáziát és az alkotóképességet. E képességek egymáshoz való viszonya meglehetősen bizonytalan. A kombinatív képesség értelmezésével valószínűleg éppen a közös részüket sikerül megragadni.

A gondolkodóképesség e három közül talán a legáltalánosabb kategória. Értelmezésének sokfélesége, kutatásának különböző irányzatai, az eltérő terminológia megnehezíti egységes, megbízható, tudományosan igazolt ismeretek kikristályosodását.

A gondolkodóképesség fejlesztése mindig is a pedagógia érdeklődésének középpontjában állt, és napjainkban is szokás az oktatás elsődleges céljaként megjelölni. A gondolkodóképesség fejlesztésének lehetőségeivel foglalkozó kutatások és elméletek több általános vonását feltárták, és a fejlesztés sok konkrét módszerét kidolgozták /ld.pl.: Bogojavlenszkij, D.N. 1966., Kelemen L. 1970./.

Azokban a kutatásokban, elméletekben, amelyek a gondolkodóképesség általános vonásait, fejlesztésének átfogó módszereit vizsgálják, többnyire felismerhetjük a kombinatív képesség különböző oldalainak a leírását is.

Salamon Jenő a divergens jellegű problémamegoldást tanulmányozza /Salamon, J. 1973. 164.-264. o. /. A vizsgálat során alkalmazott mindkét feladat megoldása igényli a kombinatív képesség működését.

Az egyszerűbb feladat megoldása során a kísérleti személyeknek egy négyzetet kell lefedniük a négyzet három részre vágott darabjával. Az összes /illetve minél több/ lefedési lehetőséget kell megtalálniuk tárgyi cselekvésekkel, illetve rajzban.

A négyzet darabjaiból négy, egymáshoz képest 90 fokkal elforgatott megoldást lehet előállítani és mind a négy elforgatott helyzet tengelyes tükörképe is új megoldást ad. Az összes lehetséges megoldás megtalálásához tehát a kétféle tükörkép és a négyféle elfordítás összes párosítását kell meg-

találni  $/4 \cdot 2 = 8/$ .

A tükrözés és az elforgatás ismeretével vagy felismerésével a megoldás egyszerű kombinatív művelet /a Descartes-féle szorzat képzésének megfelelő művelet/ alkalmazását igényli, fa alaku gráf segítségével rendszerezve az összes lehetőség előállítható. Ez esetben a feladat a kombinatív műveleti képesség működését méri, és csak annak fejlettségétől függ az előállított konstrukciók száma. Ha a kísérleti személy a forgatást és a tükrözést nem ismeri, illetve nem ismeri fel alkalmazásuk lehetőségét a feladatban, a megoldás csak próbálkozással, vagyis művelet előtti szinten történhet, így az összes megoldás megtalálása is csak véletlenszerű.

Ilyen esetben ez a feladat egyben a tágabb értelemben vett kombinatív képesség olyan működésére is példa, amikor nincsenek explicite megadva a kombinálandó elemek /jelen esetben az elforgatás 4 és a tükrözés 2 értéke/, hanem azokat is a kísérleti személynek kell megtalálnia. Jól szemlélteti a tágabb értelemben vett kombinatív képességnek és a kombinatív műveleti képességnek a kapcsolatát, összefonódását is, azt, hogy a műveleti képesség valóban része, meghatározott esetekben működő alrendszere a tágabb értelemben vett kombinatív képességnek.

A vizsgált feladat megoldásában így különböző képességek vehetnek részt, többféle működési móddal is, és azt, hogy melyik képesség fog működni, a képességtől független tudás határozza meg /geometria ismeretek, térszemlélet stb./. Így kétséges, hogy az olyan globális paramétereknek, mint a "cselekvés határfoka", a "hibás próbálkozások átlaga", a "variációk

alapelveinek tudatosulása", a "variációk megoldásának következetessége", milyen tartalmat tulajdoníthatunk, ezek mennyire általánosíthatók.

E kísérletekkel kapcsolatban is megállapíthatjuk, hogy a kombinatív képesség értelmezése az ilyen jellegű feladatok megoldásának, és egyben a problémamegoldó gondolkodásnak is, sokkal differenciáltabb megközelítését teszi lehetővé.

Salamon vizsgálatainak második feladata hasonlít az elsőhöz, a különbség csak annyi, hogy a négyzet nem három, hanem négy részre van osztva, és ez megkétszerezi a különböző lefedési lehetőségek számát.

A szerző három hazai iskolakísérletnek, a Kodály-módszerrel történő általános iskolai ének-zene oktatásnak, Lénárd Ferenc variációs tanítási kísérletének és Varga Tamás komplex matematikatanítási kísérletének a hatását vizsgálta a problémamegoldó gondolkodás fejlődésében. Mindhárom iskolában jobb eredményt kapott az országos átlagnál.

Salamon a divergens jellegű gyakorlati problémamegoldás képességét lényegében azzal a képességgel azonosítja, amit tágabb értelemben vett kombinatív képességként határoztunk meg. Valószínű, hogy ez a képesség valóban problémamegoldó gondolkodás legfontosabb részét képezi, azonban mégsem azonosítható azzal. A problémamegoldó gondolkodás más részeket, más képességeket is magában foglal, például az értékelés képességet /ld. pl.: Pólya Gy. 1970./. Pusztán elméleti megfontolások is arra az eredményre vezetnek, hogy a problémamegoldást nem lehet leszűkíteni a kombinativitásra. Ashby például kibernetikai elemzés konklúziójaként állapítja meg, hogy a problémamegoldás nagyrészt, vagy talán teljes egészében ki-

választás kérdése /Ashby, R. 1972. 318.o./. Ez a megállapítás azonban nem tagadja, hanem éppen feltételezi a lehetőségek sokféleségét, amiből választani lehet.

Lénárd Ferenc szintén tágabban értelmezi a problémamegoldó gondolkodás fogalmát, de a megoldási arányok gazdagságát, változatosságát a fejlettség legfontosabb mutatójának tekinti /Lénárd, F. 1978./. Ezzel a szemléletmóddal szorosan összefügg az általa kidolgozott variációs tanítási módszer, mellyel a gondolkodás rugalmasságát kívánja fejleszteni.

A variációs tanítási módszer lényege az, hogy az óra nagy részében feladatmegoldás folyik, mégpedig egy-egy feladat az összes lehetséges variációban előfordul. Ugyannak a feladatnak a többféle megoldása a szerző szerint fejleszti a gondolkodás rugalmasságát. "Az azonos megoldásokhoz vezető különböző gondolkodásmeneteket variációknak nevezzük. Variációknak nevezzük a különböző megoldási javaslatokat is. Ha az emberekben az ilyen értelemben vett variációs képességet kifejlesztjük, akkor ezzel lehetővé vált a gondolkodás képességének, és ennek alapján a gondolkodási tevékenységnek kibontakoztatása is." /i.m. 266.o./

A Lénárd által bevezetett variációs képesség fogalma valójában megegyezik az előzőekben meghatározott tágabb értelemben vett kombinatív képesség fogalmával, és ezt a képességet Lénárd a gondolkodási képesség legfontosabb összetevőjének tekinti.

A variációs tanításnak kétségtelenül szerepe lehet a gondolkodás rugalmasságának illetve a kombinatív képességnek a fejlesztésében. A feladatok variálásának eltulzása mechanikus-sághoz, más irányu egyoldalúsághoz vezet. Ezért a variációs



tanítás gyakorlati megvalósításait sok bírálat éri, és nem tekintjük a kombinatív képesség fejlesztésére egyedül alkalmas, általános módszernek /lásd pl.: Varga T. 1969, Lénárd F. 1969./.

A képzeletnek, fantáziának a kombinatív képesség szintén fontos részét alkotja. Rubinstein a képzelet "működéséről" írja: "A valóság észlelése nem megváltoztathatatlan elemek kötegeiből, csomóiból vagy mechanikus halmazzaiból áll. Minden képződményét átalakíthatja a képzelet. Ezek az átalakítások rendkívül sokfélék, közéjük tartozik a kombináció mint a fogások egyike, de nem lehet azokat erre korlátozni: a kombináció csak egyik fajtája vagy fogása a képzelet átalakító tevékenységének. Ennek eredményeként nem változatlanul adott elemek, vagy vonások új kapcsolata vagy kombinációja keletkezik, hanem egységes új kép, amelyben az egyes vonások nem egyszerűen összegeződtek, hanem át is alakultak, és általánosítódnak. A kombinálás csak "mechanizmus", hatása rendszerint valami olyan tendenciának engedelmesskedik, amely meghatározza a kombinálandó mozzanatok összeválogatását és értelmet lehel azokba." /Rubinstein 1964. 519.o./ Az élénk fantáziának, gazdag képzelőerőnek tehát egyik feltétele a kombinatív képesség fejlettsége.

A valóság elemeinek gondolatban való kombinálása már átvezet egy másik területre, az alkotóképesség problémáinak vizsgálatához. Hiszen a művészi alkotásnak is fontos oldala a körülmények, szereplők, helyszínek, színek, formák, hangok kombinálása. Ez azonban még kevés ahhoz, hogy műalkotás jöjjön létre, hiszen az alkotáshoz hozzátartozik az is, hogy a

művész a szándékát kifejező összeállítást, az értéket képviselő lehetőséget ki tudja választani, és ez már más képességek működését igényli. Természetesen az alkotás folyamatában ez a két mozzanat szorosan összefonódva, szét nem választhatóan jelenik meg.

A műszaki, tudományos és más alkotó tevékenységekben ugyancsak felfedezhetünk kombinatív mozzanatokat.

Az alkotó vezető tehetségét például Pietrasinski így jellemzi: "Ennek a tehetségnek egyik alapja, a gondolattársítások és gyakorlati lépések gazdag tárháza, amely az új megoldások nyersanyagául szolgál, valamint az a sajátos kombinatív képesség, amely ma még kevésbé ismert körülmények összejátszásának köszönhető." /Pietrasinski, Z. 1977. 50.o./

Az általános alkotóképességet pedig a következő idézettel jellemzi: "Mednick szerint az alkotófolyamat abban áll, hogy új képzettársítás-kombinációk jönnek létre, amelyek megfelelnek bizonyos hasznossági feltételeknek." /i.m. 194.o./

Ezek a felfogások azonban tulságosan is egyoldalúak, az alkotóképességet a kombinatív képességgel azonosítják, pedig az alkotóképességnek csak egyik, bár lehet hogy éppen a legfontosabb mozzanata.

Az alkotás és a kombinativitás azonosítása nem újkeletű, hiszen már Leibniz is az "Ars inveniendi"-t a feltalálás tudományát a kombinatorikából akarta levezetni. Leibniz elgondolásait is magában foglalja a modern heurisztika, ami azonban a kombinatorikánál sokkal szélesebb kört ölel fel, bár a kombinativitást is fontos részként megtartotta /A kombinativitás szerepéről ld.: Pólya Gy. 1977. 114., 142., 166., 177.o./.

Az alkotóképesség vagy kreativitás pszichológiája manapság divatos diszciplína. Kreativitás tesztek és kreativitás modellek tucatjai állnak már rendelkezésünkre. A kreativitás fogalma azonban a legtöbb modellben sokkal tágabb mint a kombinatív képesség. Többek között az eredetiség, az érzékenység, az értékelőképesség a problémák megfogalmazásának vagy újrafogalmazásának a képességét is magában foglalja. A két általánosan elfogadott kreativitáselmélet, Guilford és Lowenfeld elmélete a kombinatív képességet egyaránt a kreativitás egyik lényeges összetevőjének tekinti. Guilford modelljében a flexibilitás, Lowenfeldnél a variabilitás faktorai tartalmazzák a kombinatív képességet. /Ismerteti: Landau, E. 1974./

Annak illusztrálására, hogy a kombinatív képesség és az alkotóképesség kapcsolata nem pusztán spekuláció, és az alkotó tudós munkája során tudatosan vagy akaratlanul is "kombinál", idézzük fel, hogyan vall Helmholtz alkotásai megszületéséről: "Amennyire meg tudom ítélni, sohasem olyankor merültek fel, amikor agyam kifáradt, és nem is az íróasztalnál ültömben. Problémámat először minden oldalról meghányom-vetem, hogy jól át tudjak tekinteni minden lehetséges esetet és variációt, és könnyen átfussam anélkül, hogy leírnám. Ehhez többnyire hosszas munkára van szükség. Az ezt követő fáradtság elmúltával legalább egy órai testi felfrissülés és nyugodt közérzet kell ahhoz, hogy az ötletek valóban megjöjjenek." /idézi: Rubinstein, Sz. L. 1964. 898.o./

## III.

A KOMBINATIV KÉPESSEG ISKOLAI FEJLESZTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI1. MATEMATIKA-TANÍTÁS ÉS KÉPESÉGFEJLESZTÉS

A kombinativ képesség fejlesztésével és ezen belül a kombinatorika iskolai tanításával kapcsolatban jelentkező problémák egy része kapcsolódik azokhoz az ellentmondásokhoz, amelyek általában a matematika tanításával összefüggésben felvetődnek. Ezért mielőtt a kombinatorika-tanítás és a kombinativ képesség fejlesztésének kapcsolatát vizsgálni kezdenénk, röviden tekintsük át azokat a kérdéseket, amelyek nem csak a kombinatorika, hanem a matematika tanításával és a képességek fejlesztésével kapcsolatban felmerülnek.

A matematika-tanítás feladatát, célját, értelmét, jelentőségét, amióta csak iskolai matematika-tanítás létezik, mindig többnek tekintették a konkrét tananyag megtanításánál, bizonyos mennyiségű ismeret elsajátításánál. A matematika-tanítás feladatai között megjelölték valamelyik általános képesség, rendszerint a gondolkodóképesség, a "logikus gondolkodás" képességének fejlesztését is. Azonban a matematika tanítása, tanulása rendszerint nem teljesítette azt a tágabb feladatát, és többnyire még akkor sem járult hozzá a kívánt mértékben az általános képességek fejleszté-

séhez, amikor a tanulók az előírt tananyagot a követelményeknek megfelelően elsajátították. Ennek egyik oka mindenképpen az, hogy a gondolkodóképesség mibenléte, az általános képességek fejlesztésének és a matematika tanításának a kapcsolata nem volt eléggé tisztázva.

Éppen annak felismerése, hogy a hagyományos matematika-tanítás nem mindig fejleszti a kívánt mértékben a "gondolkodóképességet" vagy más általános képességeket, volt az egyik elindítója annak a nagyarányú átalakulásnak, korszerűsítési folyamatnak, ami a matematika tanításában napjainkban is világszerte megfigyelhető.

De valójában mit is jelent a matematika tanításának optimalizálása, mi jellemzi a matematika-tanítás megjavítására irányuló törekvéseket?

Hogy mit jelent a matematika-tanítás optimalizálása, arra nem könnyű válaszolni. Hiszen a matematikatanítás megjavításán, és így e kérdés megválaszolásán is, nemzetközi szervezetek, kutatóintézetek, kiváló kutatók ezrei munkálkodnak.

Az eredmények rendkívül széles spektrumának ismertetésére nem vállalkozom, csupán három jellemző álláspontot emelek ki. A három álláspont nagyjából reprezentálja a probléma megközelítési módjainak azt a három fő csoportját, amibe némi leegyszerűsítéssel a korszerűsítési irányzatok, törekvések többsége besorolható.

Az UNESCO egyik kiadványa az elemi matematika-oktatás célját, tartalmát a következőképpen fogalmazza meg:

"A mindennapi élet különböző mozzanataiban való fontossága miatt kétségtelen, hogy az aritmetikai számítások meg-

értése és készségének elsajátítása, valamint alkalmazása a mindennapi problémák megoldására, az elemi matematika-oktatásnak továbbra is elsődleges feladata lesz. /.../

A mindenki számára szükséges aritmetikai ismeretek megtanításán túl az iskolának elő kell készítenie a tanulókat a későbbi, felsőbb fokozatokban történő matematika-tanulásra is. /.../

A harmadik cél, melynek fontossága egyre nő, az, hogy matematikai műveltséget nyújtson minden gyermeknek. Ez azt jelenti, hogy az aritmetikai tudás csak egy része annak a matematikai műveltségnek, amellyel a jövőben minden embernek rendelkeznie kell ahhoz, hogy képes legyen elolvasni, megismerni /a megértés különböző fokán/ azt, amit a matematikusok és a tudósok csinálnak." /New trends in mathematics teaching, 1973., 3-4.o./

Skemp a matematikatanítás korszerűsítésével együttjáró változásokkal kapcsolatban fogalmazza meg a következő gondolatokat:

"A változtatás azonban nem jelent feltétlenül javítást, ha ezeket az új témákat a régi, rossz módszerekkel tanítják. /.../ A tanulás és tanítás problémái pszichológiai problémák, és mielőtt a matematika-tanítás megjavításához hozzáfoghatnánk, elengedhetetlenül szükséges, hogy többet tudjunk meg magáról a tanulási folyamatról." /Skemp, R. 1975. 12-13.o./

A két idézettel nem az érdemi megoldásokat, inkább csak a problémák megközelítési módját kívántam érzékeltetni. Az első idézet a tartalmi korszerűsítés körében folyó kutatások szemléletmódját illusztrálja, amelyek a hangsúlyt a tananyag

kiválogatására, összeállítására helyezik. A megoldást a következő kérdések megválaszolásán keresztül keresik: Mi az, ami a matematikában fontos?; Mire van szükség a gyakorlati életben, a felsőbb matematika tanulmányozásához és a tudományok megértéséhez? A kiválasztott tartalomhoz kell azután megtalálni a megfelelő módszereket, eszközöket. A matematika-tanítás korszerűsítésének ez a megközelítési módja többnyire a matematikusokat jellemzi. /Az idézett tanulmánykötet szerzői egyébként az International Commission on Mathematical Instruction of the International Mathematical Union tagjai/

Skemp a matematika-tanulás megjavításán munkálkodó pszichológus álláspontját képviseli. Nem foglalkozik különösebben a matematikatanulás céljaival, értelmével, a tananyag kiválasztásával, mindezeket adottnak fogadja el. A pszichológiai ismereteket és a tanulási törvényeket alkalmazza a matematika tananyagára, hogy ezzel a matematika-tanulást könnyebbé, eredményesebbé tegye.

E két megközelítési mód és kutatási terület között fontosságában, időszerűségében, általánossági fokában nem állíthatunk fel sorrendet. Mindkettő egyaránt fontos, időszerű, és körülbelül azonos szinten veti fel a problémákat, így egymást kölcsönösen kiegészítő kutatási területeket alkotnak.

A korszerűsítési törekvések harmadik, és ma már legjelentősebb csoportja Piaget és a genfi iskola munkássága nyomán bontakozott ki.

Már Piaget maga megfogalmazza kutatási eredményeinek a matematika tanításával kapcsolatos konzekvenciáit: "Ha a matematika építménye valóban olyan "strukturákon" nyugszik, a-

melyek egyébként megfelelnek az értelem strukturáinak, akkor a matematika didaktikáját ezeknek a műveleti strukturáknak a fokozatos kiépítésére kell alapozni." /Piaget, J. 1970. 223.o./

E gondolatmenetben felvázolt lehetőség következetes megvalósítására több átfogó matematika-tanítási tervezet született.

A szovjet pszichológusok, elsősorban Vigotszkij és Galperin, Piaget elméletét értelmezve és /főleg a fejlődési szakaszok életkori állandóságára vonatkozó megállapításokat/ bírálva kísérletek sorozatával bizonyították a fejlődés meggyorsíthatóságát, a fejlesztésnek az éréssel legalább egyenrangú szerepét. Galperin nevéhez fűződő "értelmi cselekvés" elmélete lényeges vonásaiban rokon Piaget fejlődési koncepciójával. Ami pedig az elméletek pedagógiai oldalát illeti, a leglényegesebb különbség az, hogy míg Piaget az oktatás megjavítását az értelmi fejlődési szakaszok figyelembevételében látja, a Galperin-iskola munkatársai az oktatásnak a fejlődés szakaszaira gyakorolt hatását emelik ki.

Galperin munkatársai, Davidov és Elkonyin kísérleti iskolákban az alapfoku matematika-tanítás átfogó reformját valósították meg. A kísérleti oktatás tartalmát az alapvető matematikai strukturák kialakítása jelenti, metodikailag pedig az értelmi fejlődés szakaszos formálásának elméletén alapszik /Elkonyin-Davidov 1972./.

Egy másik jelentős, szintén Piaget elméletére épülő átfogó matematika-tanítási koncepció kidolgozása Dienes Zoltán nevéhez fűződik.



Dienes a hagyományos, elkülönült matematikai-pszichológiai szemléleten túllépve általánosabban ragadja meg a kérdést, egyszerre keresi a választ a "miért?"-re, a "mit?"-re és a "hogyan?"-ra. Összefüggéseiben vizsgálja a matematika-tanulás matematikai, pszichológiai, valamint pedagógiai feltételeit, és a tanulás mindhárom oldalát alapvetően átalakítja.

Matematikai szempontból a legfontosabb változás az, hogy a tananyagot a matematika legáltalánosabb strukturái köré építi ki. Pszichológiai szempontból igen nagy jelentőségű, hogy egyetlen "jogos" motivációként a matematika-tanulás örömszerző hatását, a felfedezés izgalmát ismeri el. És ami a pedagógiai oldalt illeti, nem a különböző gyakorlati igények kielégítését tekinti a matematika-tanulás céljának, hanem a személyiség építését.

A matematika-tanítás feladatainak, módszereinek ez a megközelítése megfelel a legkorszerűbb oktatáselméleti irányzatoknak is. Bruner /aki több matematika-tanítási kísérlet elvégzésében Dienes munkatársa/ az oktatás általános elméletének kidolgozása során hangsúlyozza a matematika tanításának a személyiség fejlődésében betöltött kiemelkedő szerepét. Az iskolai tananyag két legfontosabb oszlopának a matematikát és az anyanyelvet tekinti /Bruner, J.S. 1974./.

Ha a matematika-tanítás korszerűsítésének három felvázolt koncepciója közül az elsőt a matematikai megközelítésnek neveztük, a másodikat pszichológiai, a harmadik, alapvető problémákat felvető, eredményeket integráló általános megközelítést - a szó tágabb értelmében - pedagógiai, mondhatjuk.

Az ilyenfajta törekvések visznek közelebb a pedagógia ősi

dilemmájának a megoldásához, ami sokáig a képességek fejlesztésének és az ismeretek közvetítésének a szembeállításában nyilvánult meg. A nevelési fő feladatok két oldalról, az objektivált kulturtartalmak és a befogadó szubjektum oldaláról való megközelítése /Ágoston Gy. 1976. 78-86.o./ lehetővé teszi, hogy mind az objektivált tudás fontosabb részeinek elsajátítása, mind az ember alapvető képességeinek a kifejtése megvalósuljon.

Ez azonban csak akkor lehetséges, ha a kétféle követelmény szintézise már magában a tananyagban megvalósul, vagyis például a matematika esetében az ismeretek közvetítése, megtanítása úgy történik, hogy az egyben az ember alapvető képességeit is kifejlessze.

## 2. A KOMBINATIV KÉPESSÉG FEJLESZTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI

A kombinativ képesség fejlesztési lehetőségeinek szám-  
bavétele előtt először is azt kell tisztáznunk, mit is je-  
lent valójában a kombinativ képesség kifejlesztése. Az előző-  
ekben vázolt rendszerszemléletű megközelítés konzekvenciáit  
végiggondolva a képesség kifejlesztésén egy "nagy teljesít-  
ményű", sokoldalú működésre alkalmas, az általános képessé-  
gek működésében hatékonyan résztvevő, a részek differenciált-  
sága, fejlettsége révén más képességekhez szorosan kapcsoló-  
dó pszichikus rendszer módszeres kialakítását kell értenünk.  
Ennek értelmében csak a komplex többirányú fejlesztés vezet-  
het eredményre, egy hosszantartó fejlődési-fejlesztési folya-  
mat optimalizálását kell megoldani.

A kérdés mármost az, hogy mit várhatunk ettől az opti-  
malizálástól, és milyen feltételei vannak, milyen konkrét  
problémákat kell megoldani az optimalizációs folyamat terv-  
szerű irányítása érdekében?

A képesség optimalizációs folyamatának megismerése, ter-  
vezhetővé, irányíthatóvá tétele mindenképp előtt lehetősé teszi,  
hogy /a pedagógiai kultúra általános fejlődésétől függően/  
minden tanulónál vagy a tanulók többségénél a kombinativitás  
olyan szintje fejlődjön ki, ami ma még csak kevésnél figyel-  
hető meg. Ez a képesség vizsgálatának legfőbb célja és értel-  
me. Az optimális fejlesztés megismerésének másik eredménye

az lehet, hogy megvalósíthatóvá válik a kialakítás folyamatának gazdaságossá, hatékonyá tétele.

Melyek az optimalizáció legfontosabb feltételei? Mindenek előtt a rendszerbeilleszkedés, a rendszerhez tartozás problémáit kell megoldani. Ezt a használatos didaktikai kategóriákkal úgy szokás megfogalmazni, hogy egy tudáselemnek minél több kapcsolatát kell kialakítani más tudáselemekkel. A rendszerszemlélet segítségével ennél tovább léphetünk, a potenciális kapcsolatok feltérképezésével és kiépítésével újabb képességeket vagy a képességek újabb működési módjait alakíthatjuk ki rendkívül gazdaságosan. Vagyis a már kialakult elemeket szervezhetjük új egységekbe, ami az elemek fejlődésére is visszahat. Ezt a szokásos pszichológiai fogalmakkal úgy fejezhetjük ki, hogy sok esetben a kialakult, meglévő képességek mellett létezhet sok olyan kialakítatlan, potenciális képesség, amelyeket a már meglévők transzferhatása révén könnyen ki lehetne fejleszteni. Ilyen esetekben a potenciális képességek kialakítása, a rendszer teljessé tétele jelentősen megnöveli annak hatékonyságát, tartósságát. Az elemek differenciálódása és fejlettsége így egyben más képességekhez való szerves kapcsolódásnak és a tágabb rendszerekbe illeszkedésnek is a feltétele.

A kombinatív képesség optimális kialakítása így a tágabb értelemben vett kombinatív képesség és a kombinatív műveleti képesség szerves kapcsolatának biztosítását, a műveletek rendszerének teljessé tételét, a műveletek részeinek differenciált kifejlesztését követeli meg.

A műveleti képesség teljes optimalizációs folyamatának feltárása természetesen egyelőre távlati, de reális cél, az

optimális fejlesztésnek azonban van sok olyan mozzanata, amit már a jelenlegi feltételek mellett is meg lehet valósítani.

A tágabb értelemben vett kombinatív képesség fejlesztésének például figyelemreméltó lehetőségeit rejti magában Lénárd variációs tanítása. A módszer egyelőre a matematika és a történelem tanításában produkált biztató /bár eléggé vitatott/ eredményeket. Az alapelvek kétségtelenül használhatók, a konkrét megvalósítás módszerének a tulzásoktól, a formalizmustól való megszabadítása, az adekvát, a variációk lehetőségét "természetes" módon magában foglaló területek feltárásával valószínűleg egyértelműen hatékony eljárásnak fog bizonyulni. A tantárgyak többségét, például a természettudományok és különösen a nyelvek tanítását is magábanfoglaló, egységesen tervezett és kellő mértékkel alkalmazott "variációs tanítás" a tágabb értelemben vett kombinatív képesség fejlesztéséhez nagymértékben hozzájárulhat.

A kombinatív műveleti képesség kialakításának - megfelelő feltételek mellett - a kombinatorika tanítása lehet az adekvát eszköze.

A kombinatorika-tanítás alapproblémáját az ismeretek közvetítése és a képességfejlesztés kapcsolatáról korábban elmondottak alapján az jelenti, hogy hogyan lehet a kombinatorikai ismereteket úgy megtanítani, hogy egyben a kombinatív képesség optimális fejlődése is megvalósuljon.

A tanítás során figyelembe lehet venni a matematika struktúráját, és követni a matematikai ismeretek valamilyen egymásraépülését, és ki lehet indulni a kombinatív képesség struktu-

rájából és fejlődési folyamatából. Belátható, hogy a kétféle követelményt csak akkor lehet együttesen kielégíteni, ha elsődlegesen a képesség kialakulásának folyamatából, fejlesztésének feltételeiből vezetjük le a tananyag tartalmát és elrendezését.

Hogy a kombinatorikai ismeretek, a matematikai formalizmus elsajátítása valóban nem fejleszti a kombinatív képességet, azt a régebbi, gimnáziumi kombinatorika-tanítás /amit később a tananyagcsökkentő intézkedések eltöröltek/ tapasztalatai bizonyítják. A kombinatorikai műveletekkel kapcsolatos számítások megtanulásával a kombinatív képesség pszichikus rendszereibe egyáltalán nem illeszkedő, elszigetelt, vagy jobb esetben a feladatmegoldó képességhez kapcsolódó tudáselemek alakulnak ki.

Feltételezve, hogy a kombinatív képesség fejlesztésének szempontjaiból indulunk ki, sorra vehetjük, hogy a kombinatorika tanításának milyen követelményeket kell kielégítenie.

Mindenekelőtt ahhoz, hogy a képesség valóban kiépüljön, végig kell haladnia azokon a szakaszokon, amelyeket Piaget megállapít, és a Galparin-elmélet értelmében az oktatásnak az egyes szakaszok kifejlődésének optimális feltételeit kell biztosítani. Így a művelet előtti és a konkrét műveletek szintjén a cselekvés, a tárgyakkal való manipulálás a fejlesztés adekvát eszköze. Erre vonatkozóan a kombinatív képesség fejlesztésének követelményeivel teljes összhangban vannak azok az alapelvek, amelyeket Dienes a matematikatanulással kapcsolatban megfogalmaz.

A következő négy alapelvről van szó:

1. A dinamika elve. /Előkészítő, strukturált és gyakorló játékok egymásutáni alkalmazása./

2. A konstruktivitás elve. /A konstrukció mindig megelőzi az elemzést./

3. A matematikai változatosság elve. /A lehető legtöbb változó variálása./

4. A perceptív /észlelési/ változatosság vagy többszörös konkretizálás elve. /A fogalmi strukturákat sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában kell bemutatni./ /Dienes Z. 1973. 66.o./

A kombinatív műveletek kialakítását szolgáló cselekvésekre konkretizálva a matematikai változatosság elve azt jelenti, hogy műveletenként annyi számértékekben különböző feladatot kell alkalmazni, hogy az egyes műveletek általános törvényszerűségei kialakulhassanak. /A konstrukciók növekvő száma miatt jelentkező korlátról korábban elmondottak értelmében kérdéses, hogy lehet-e egyáltalán minden műveletre kellő számú feladatot konstruálni./

A formális szint kialakulását a tárgyi cselekvéstől való elszakadás, a műveletek manipuláció nélküli elvégzése jelzi. Valószínűleg a formális szint megjelenésével egyidőben kerülhet sor a műveleti képesség és a tágabb értelemben vett képesség fejlesztésének összekapcsolására. Hogy a műveleti sémák nyitottságának, megőrzésére a továbbfejlődés, az akkomodáció és az asszimiláció lehetőségének biztosítása milyen konkrét tevékenységeken keresztül történhet, azt ma még nehéz lenne pontosan megmondani.

A formális szint kialakulása után kerülhet sor a matematikai

ismeretrendszer, a matematikai formalizmus elsajátítására. A matematikai ismeretrendszer ekkor már eredményesen tanítható, mivel építeni lehet a cselekvések során kialakított műveleti sémákra.

Látható, hogy a kombinatorika-tanítás ilyen felépítése esetén a kombinatív képesség kifejlesztése és a kombinatorikai ismeretek megtanítása egyaránt megvalósítható, azok egymást kölcsönösen kiegészítik.

A kombinatorika tanításának a kombinatív képesség kifejlesztésére irányuló eljárásainak a módszertana még sem elméletileg nincs kidolgozva, sem átfogó kísérleteket nem végeztek e lehetőségek gyakorlati realizálására. Érdekes módon a Piaget által feltárt értelmi alapstruktúrák közül a csoport és a rendezési struktúrák kifejlesztésének lehetőségeivel kapcsolatban laboratóriumi kísérletek sokaságát végezték el, és az ezekre alapozott tantervek széleskörű iskolai kipróbálása is megvalósult. A kombinatorika - amit Piaget az ítéleti műveletek rendszerre szerveződésének előfeltételeként, az értelmi fejlődés alapvető jelentőségű összetevőjeként mutat be - viszont minden fontosabb átfogó matematika-tanítási kísérletből kimaradt. A korábban hivatkozott két fontosabb koncepció /Dienes Z. 1973. illetve Elkonyin-Davidov 1972./ egyikében sem szerepel a kombinatorika.

A kombinatorika-tanítás hagyományos módszertana /pl.: Gyapjas F. 1972./ a kombinatorikát a matematikai ismeretrendszer egészében helyezi el, ennek megfelelően foglalkozik az előismeretek biztosításával, és a kombinatorika megtanítását is a későbbi valószínűségszámítás előkészítésének tekinti, a



kombinativ képesség fejlesztése kívül esik érdeklődési körén.

W. Türke /1967./ általános iskolai kombinatorika tanítási kísérlete már kedvezőbb lehetőséget biztosít a kombinativ képesség fejlődéséhez. A kombinatorika tanítását tágabb matematikai összefüggés-rendszerbe illeszti, a halmaz, a leképezés, a függvény fogalmának kialakításával hozza kapcsolatba. A hat hagyományos kombinatorikai művelet /ismétléses és ismétlés nélküli permutációk, variációk, kombinációk/ tulajdonságainak megtanítása során a tanulóknak két fő kérdésre kell választ találniuk: milyen lehetőségek vannak?; és hányféle lehetőség van? A műveletek azonosítása a bevezetett ábrázolási mód formális jegyei alapján történik /pl.: Keresztezik-e egymást a halmazok egymáshoz rendelt elemeit összekötő vonalak?/

Türke módszerének két jelentős vonása az, hogy egyrészt nem csupán a lehetőségek számának meghatározását kívánja megtanítani, hanem a lehetőségek felsorolásával is foglalkozik, másrészt pedig - ha korlátozott mértékben is - a cselekvésekből indul ki. Ezek a cselekvések azonban nem elegendőek a műveletté szerveződés hosszú folyamatának realizálásához, és módszertanilag nem is azt a célt szolgálják. Egyszerűen a matematika-tanítás empirikus-induktív útjának első lépését képviselik, szerepük többnyire csak a szemléltetés.

Türke módszere jó példát szolgáltat a matematika-tanítás és a képesség-fejlesztés optimalizálásának kihasználatlan lehetőségeire. A tananyag eredményes elsajátítása Türke kísérletében azt jelenti, hogy a tanulóknak - többek között - kialakul az ismétlés nélküli permutációk, az ismétlés nélküli variációk és az ismétléses variációk előállításának felsoro-

lásának képessége. E képességeknek megfelelő pszichikus rendszerek részeiből egy újabb pszichikus rendszer szervezhető egybe, alakítható ki. Vagy másként fogalmazva, e műveletek megtanulása után, azok transzferhatása révén egy negyedik - a Descartes-féle sorozat képzésének megfelelő művelet - minimális energiabefektetéssel elsajátítható. Ez egyben lehetővé teszi a fa alaku gráffal előállítható konstrukciók képzésének rendszerre szerveződését, a műveletek egy általánosabb sémába integrálódhatnak, kialakulhat az elemi kombinatív művelet mint pszichikus rendszer. Hogy Türke kísérleti tanítása során kialakul-e ez az általánosabb műveleti séma - lehet hogy igen, de valószínűbb hogy nem - az e kísérlet során fel sem merül kérdésként.

A képesség optimális kialakításának útja egyébként valószínűleg éppen a fordított megoldást igényelné: az általánosabb - és bizonyos értelemben mégis egyszerűbb - séma, a Descartes-féle szorzat képzésének megfelelő művelet kialakításával kellene kezdeni, és fokozatosan kerülhetne sor a különböző kombinatorikai műveleteknek megfelelő differenciálódásra.

Varga Tamás /1967./ által leírt kombinatorika-tanítás tartalmilag magában foglalja mindazokat a mozzanatokat, amelyek a kombinatív képesség eredményes kialakításához szükségesek, bár a tananyag elrendezése inkább a matematikai ismeretek közvetítésének igényeit szolgálja. A felsorolt feladatok, az alkalmazott módszer azonban a megfelelő mennyiségű cselekvés biztosításával és a kombinatív képesség kialakulási szakaszainak megfelelő elrendezésben alkalmas lehet a kombi-

nativ képesség optimális fejlesztésének megvalósítására.

Magyarországon az alapfoku matematika-tanításban először az 1974-től kezdődően bevezetett ideiglenes tantervekben kap szerepet a kombinatorika.

Amint a tantervek, tankönyvek készítői is kiemelik, a matematika-tanítás célja túlnő a megtanítandó tananyagon. A tananyag megtanításán túl különböző általános képességek kifejlesztésére is törekedni kell, mint például az önellenőrzés, a találékonyság, a rugalmasság, a kreativitás, a rendszeresség, a tervszerűség, a pontosság stb. /Cervenakné 1974. 5.o./ Ennek megfelelően a kombinatorika célja is a kombinatív képesség kifejlesztése lehet.

A tanterv ideiglenes, kísérleti jellege miatt a részletes elemzésnek nincs jelentősége, heterogén és kimunkálatlan jellegére készítői is felhívják a figyelmet. Így csupán a főbb alapelvekkel, a tantervek általános kereteivel érdemes röviden foglalkozni.

Az ideiglenes tananyag két egymástól független részre tagolódik, mivel egyidejűleg kezdődött meg bevezetése az első és az ötödik osztályban.

Az alsó tagozat tanterve, legalábbis ami a főbb alapelveket illeti, alkalmas lehet a kombinatív képesség eredményes fejlesztésére. A képesség fejlődésére biztosított idő, az egyes periódusok időbeli tagolása elvileg megfelel a képesség-fejlesztés követelményeinek.

A tananyag egyszerű feltételeknek megfelelő minél több lehetőség előállítására irányuló feladatokat tartalmaz. Az első és második osztályban a lehetőségek rendszerezését

még nem várja el a tanulóktól, és a tanár feladata harmadik és negyedik osztályban is csak a rendszerezés megtalálásának irányítása, segítése.

Az első osztályban 10-15 alkalommal kerül sor főleg az elemi kombinatív műveletnek megfelelő konstrukciók előállítására. A második évben két halmaz elemeiből álló párok, három halmaz elemeiből képezhető hármasok előállítása a feladat, vagyis a tanterv kihasználja a Descartes-féle szorzat képzésének megfelelő műveletben rejlő lehetőségeket, a matematikai változatosság, az egyszerűség és az általános jelleg által biztosított előnyöket. A harmadik osztályban kétszer kerül sor kombinatorikai jellegű feladatok megoldására, ezek jellegükben és mennyiségükben nem lépnek túl a második osztályban elért szinten. A negyedik osztályban főleg matematikai problémákhoz kapcsolódnak a kombinatorikai feladatok, és már a lehetőségek számának meghatározására irányulnak.

Az első négy osztály kombinatorikai feladatainak összességével kapcsolatban felvethető a mennyiség kérdése: vajon a viszonylag kevés kombinatorikai feladat elegendő-e arra, hogy a képesség egyes szintjeinek kifejlesztését valóban biztosítsa? Kérdéses az is, hogy azok a tág keretek, amelyen belül a pedagógus a kombinatorika tanítására szánt időt csökkentheti vagy növelheti, nem vezet-e a teljesítmények túlzott szóródásához. Ugyancsak problémát okozhat az értékelés megoldatlansága is. A differenciált, az egyéni tempónak megfelelő képesség-fejlesztés indokolttá teszi, hogy a tantervben ne szerepeljenek az egyes évfolyamokra bontott szigorú köve-

telmények, a pedagógusnak azonban ilyenkor is tudnia kell, hogy hol tartanak az egyes tanulók, hogy az aktuális fejlődési szakasznak megfelelő feladatokról gondoskodhasson, és a tulzottan lemaradókat segíthesse.

A kombinatorikai feladatok sokfélesége, a perceptív változatosság elvének megvalósulása, a matematika sok más területével való kapcsolata jól szolgálja a tágabb értelemben vett kombinatív képességgel való kapcsolat kialakulását is. /Cervenakné, 1974., 1975., 1976., Cervenakné-Varga 1974., 1975., Kovács Z. 1976., 1977./

A felső tagozat kombinatorika tananyagában hasonló alapelvek érvényesülnek. A különbség lényegében csak az, hogy kevesebb a tárgyi cselekvést igénylő feladat, és a tanulók eljutnak az egyes műveletekkel kapcsolatos törvényszerűségek megformulázásáig. /Cser-Pálffy 1974., 1975.a., 1975.b., 1977.a., 1977.b., Cser-Imriczéné 1975., 1976., Cser-Imriczéné-Pálffy 1977.a., 1977.b./

Az új matematikai tantervek a nyolc év tananyagát kezelhetik egységesen, ami az egyes fejlődési szakaszok kialakítására fordítható idő mennyiségét, a cselekvések, a megoldandó feladatok számának növelését teszi lehetővé. Ilyen feltételek mellett a kombinatorika tanítása biztosíthatja a kombinatív műveleti képesség optimális kifejtését.

A képesség kialakulási folyamatának hatékony irányítása, a differenciáció és az eredményes kompenzáció azonban csak akkor valósítható meg, ha rendelkezésre állnak megfelelő értékelő eszközök.

## Ö S S Z E G Z É S

A kombinatív képességet az ember egyik általános képességének tekinthetjük, ami szervesen kapcsolódik más általános képességekhez, részt vesz más általános képességek működésében.

A kombinatív képességnek két tartományát különböztethetjük meg, és ennek megfelelően definiálhatjuk a kombinatív képesség szűkebb és tágabb fogalmát. A szűkebb értelemben vett kombinatív képességet komplex műveleti képességként, kombinatív műveletek rendszereként írhatjuk le.

A kombinatív műveleti képesség kialakulásában értelmezhetjük azokat a szakaszokat, fejlődési szinteket, amelyeket Piaget az értelmi műveletek fejlődésében megállapít.

Figyelembe véve azt a lehetőséget, hogy a műveletek tulajdonságai, a műveletvégzés törvényszerűségei az iskolai oktatás során megtaníthatók, az egységes értelmezés érdekében Piaget által a "spontán" fejlődésben megállapított három szakaszt, fejlettségi szintet, a művelet előtti szintet, a konkrét műveletek szintjét és a formális szintet egy negyedikkel, a tudatos műveletvégzés szintjével egészíthetjük ki. A négy fejlettségi szintnek négy különböző működési mód felel meg: a művelet előtti szinten a különböző lehetőségek megtalálása rendszertelen próbálkozással történik; a konkrét műveletek szintjére a lehetőségek szisztematikus felku-

tatása és utólagos rendszerezése jellemző; a formális szinten az összes lehetőség felsorolása kialakult műveleti sémák alkalmazásával valósul meg; a tudatos műveletvégzés pedig a műveletek elsajátított törvényszerűségeinek tudatos alkalmazását jelenti.

A formális szinten megjelenő kombinatív műveletekről feltételezzük, hogy azok az előző fejlődési szinteken elvégzett cselekvések rendszerre szerveződése révén jönnek létre. A cselekvések pszichikus rendszerekké szerveződésének feltételeiből kiindulva megvizsgálhatjuk, hogy a kombinatorikai műveleteknek milyen műveleti sémákat feleltethetünk meg. Ennek megfelelően háromféle bonyolultságu, elemi, egyszerű és összetett kombinatív műveletek kialakulását tételezhetjük fel.

A kombinatív műveleti képesség tervszerű kifejtése, ami a szakaszos fejlődést figyelembe véve több éves folyamat, az adott szakaszoknak megfelelő cselekvéseken keresztül történhet.

A kombinatív műveleti képesség fejlesztésének kerete az iskolai kombinatorika-tanítás lehet, ha annak módszertana a képesség-fejlesztés alapelveire épül.

A fejlődési folyamat optimalizálása, hatékony irányítása megköveteli a képesség fejlettségének értékelésére alkalmas eszközök kidolgozását.

I R O D A L O M

- ÁGOSTON György /1976./: A pedagógia alapfogalmai és a nevelési célrendszer  
Akadémiai Kiadó, Budapest
- ASHBY, W. R. /1972./: Bevezetés a kibernetikába  
Akadémiai Kiadó, Budapest
- BÁCSKAI Zoltán /1971./: Matematika 132.-146.o.  
Központi Statisztikai Hivatal, Budapest
- BOLTYANSZKIJ, V.G. - GOHBERG, I.C. /1970./: Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából  
Tankönyvkiadó, Budapest
- BOGOJAVLENSZKIJ, D.N. - KALMIKOVA, Z.I. - KUDRJAVCEV, T.V. /1966./: A gondolkodás fejlesztése iskolai feladatok megoldása útján  
Akadémiai Kiadó, Budapest
- BRUNER, J.S. /1974./: Új utak az oktatás elméletéhez  
Gondolat Kiadó, Budapest
- CERVENAKNÉ Neményi Eszter /szerk. 1974./: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CERVENAKNÉ Neményi Eszter /szerk. 1975./: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos tananyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CERVENAKNÉ Neményi Eszter /szerk. 1976./: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos tananyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest



- CERVENÁKNÉ Neményi Eszter - VARGA Tamás /1974./: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos tananyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CERVENÁKNÉ Neményi Eszter - VARGA Tamás /1975./: Munkalapok az ideiglenes matematika tanterv 2. osztályos tananyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CURRY, H. - FEYS G. /1974./: Combinatory Logic  
Vol. I-II.  
Amsterdam, North Holland Publishing Co.
- CZAPÁRY Endre és mtsi. /1974./: Matematika a gimnázium és szakközépiskolák IV. osztálya számára, 203-245.o.  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - IMRICZE Zoltánné /1975./: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos tananyagának tanulásához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - IMRICZE Zoltánné /1976./: Matematika az általános iskola 7. osztálya számára /Ideiglenes tankönyv/  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - IMRICZE Zoltánné - PÁLFY Sándor /1976./: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - IMRICZE Zoltánné - PÁLFY Sándor /1977.a./: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanulásához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - IMRICZE Zoltánné - PÁLFY Sándor /1977.b./: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest

- CSER Andor - PÁLFY Sándor /1974./: Matematika az általános iskola 5. osztálya számára /Ideiglenes tankönyv/  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - PÁLFY Sándor /1975.a./: Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv. 6. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - PÁLFY Sándor /1975.b./: Matematika az általános iskola 6. osztálya számára /Ideiglenes tankönyv/  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - PÁLFY Sándor /1977.a./: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- CSER Andor - PÁLFY Sándor /1977.b./: Feladatgyűjtemény és munkalapok az általános iskola 5. osztálya számára  
Kiegészítés az ideiglenes matematika tankönyvhöz  
Tankönyvkiadó, Budapest
- DENKINGER Géza /1968./: Valószínűségszámítás  
Tankönyvkiadó, Budapest
- DIENES Zoltán /1973./: Építsük fel a matematikát  
Gondolat Kiadó, Budapest
- ELKONYIN, D.B. - DAVIDOV, V.V. /1972./: Életkor és ismeretszerzés  
Tankönyvkiadó, Budapest
- FUCHS László /1963./: Bevezetés az algebra és a számelméletbe /138-171.o./  
Tankönyvkiadó, Budapest
- GÁSPÁR Gyula /szerk. 1968./: Műszaki matematika I. /65.-88.o./  
Tankönyvkiadó, Budapest
- GYAPJAS Ferenc /1972./: A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanításának módszertana  
Tankönyvkiadó, Budapest
- HAJNAL Albert /1973./: A modellek modellje , in: Rendszerkutatás  
Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

- HERDEN, G. /1966./: The advanced theory of language as choice and chance  
Berlin - Heidelberg - New York
- HORVÁTH György /1972./: A tananyag és a tankönyv strukturája  
Tankönyvkiadó, Budapest
- KELEMEN László /1970./: A gondolkodás nevelése az általános iskolában  
Tankönyvkiadó, Budapest
- KEMÉNY, J.G. - SNELL, F.L. - THOMPSON /1971./: A modern matematika alapjai /Véges strukturák/  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Kádárné FÜLÖP Judit - JOÓ András /1977./: Beszámoló a strukturális elemzés pedagógiai alkalmazásának néhány módszeréről /Kézirat/ /OPI dokumentumok 8./  
OPI, Budapest
- KOVÁCS, L.B. /1969./: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei  
Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest
- KOVÁCS Zoltán /1976./: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- KOVÁCS Zoltán /1977./: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához  
Tankönyvkiadó, Budapest
- KUNSTÁR Jánosné /1977./: Feladatgyűjtemény az általános iskola ideiglenes matematika tanterveihez /Módszertani Közlemények Könyvtára 6./ Szeged
- LANDAU, E. /1974./: A kreativitás pszichológiája  
Tankönyvkiadó, Budapest
- LEIBNIZ, L.G. /1930./: Ujabb vizsgálódások az emberi értelemről  
A Magyar Tudományos Akadémia, Budapest

- LÉNÁRD Ferenc /1969./: A gondolkodás merevsége és a vitaszellem  
Magyar Tudomány 1969. 648-656.o.
- LÉNÁRD Ferenc /1978./: A problémamegoldó gondolkodás  
Akadémiai Kiadó, Budapest
- LEONTYEV, A.N. /1964./: A pszichikum fejlődésének problémái  
Kossuth Könyvkiadó, Budapest
- LOVÁSZ László - GÁCS Péter /1978./: Algoritmusok  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- LOVÁSZ László - VESZTERGOMBI Katalin - PELIKÁN József /1971./: Kombinatorika az általános és középiskolai matematika szakkörök számára  
Tankönyvkiadó, Budapest
- A magyar nyelv értelmező szótára III. kötet  
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.
- Matematikai kisenciklopedia /1968/  
Gondolat Kiadó, Budapest
- MILLER, G.A. /1956./: The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information.  
Psychological Review. 1956., 63, 81-97.
- NAGY József /1968./: A készség és a jártasság szabatos meghatározásáról  
Köznevelés 1968. 419.o.
- NAGY József /1972./: A témazáró tudásszintmérés gyakorlati kérdései  
Tankönyvkiadó, Budapest
- NAGY József /1977./: A pedagógiai értékelés alapjai  
Kézirat, Szeged
- NAGY József /1978./: Köznevelés és rendszerszemlélet  
Kézirat /soksz./  
Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém
- NEUMANN János /1972./: A számológép és az agy  
Gondolat Kiadó, Budapest

New trends in mathematics teaching, Volume III.  
UNESCO, Paris, 1972

NORMAN, D. /1976./: Memory and Attention  
An introduction to human information processing  
John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto

Pedagógiai Lexikon II. kötet  
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.

PELLE Béla /szerk., 1978./: Így tanítjuk a matematikát II.köt.  
Tankönyvkiadó, Budapest

PIAGET, J. /1967./: A gyermek logikájától az ifju logikájáig  
Akadémiai Kiadó, Budapest

PIAGET, J. /1970./: Válogatott tanulmányok  
Gondolat Kiadó, Budapest

PIETRASINSKI, Z. /1977./: Alkotó vezetés  
Gondolat Kiadó, Budapest

PÓLYA György /1977./: A gondolkodás iskolája  
A matematika új módszerei új megvilágításban  
Gondolat Kiadó, Budapest

PÓLYA György /1970./: A problémamegoldás iskolája  
Tankönyvkiadó, Budapest

PONOMARJOV, J. /1968./: Pszichikum és intuición  
Kossuth Könyvkiadó, Budapest

RUBINSTEIN, Sz.L. /1964./: Az általános pszichológia alapjai  
Akadémiai Kiadó, Budapest

RUBINSTEIN, Sz.L. /1967./: Léte és tudat  
Kossuth Könyvkiadó, Budapest

RYSER, H.J. /1963./: Combinatorial mathematics  
Qvinn and Boden Company, Inc., Rahway,  
New Yersey

SALAMON Jenő /1973./: A gyakorlati problémamegoldás fejlődése  
6-14 éves korban  
Akadémiai Kiadó, Budapest

- SKEMP, R.R. /1975./: A matematika-tanulás pszichológiája  
Gondolat Kiadó, Budapest
- SZADOVSZKIJ, V.V. /1976./: Az általános rendszerelmélet  
alapjai  
Statisztikai Kiadó Vállalat, Budapest
- SZELE Tibor /1970./: Bevezetés az algebrába /55.-87.o./  
Tankönyvkiadó, Budapest
- SZENDREI János /1974./: Algebra és számelmélet  
Tankönyvkiadó, Budapest
- TOMESCU, I. /1978./: Kombinatorika és alkalmazásai  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- TÜRKE, W. /1967./: Kombinatorika tanítása az alsó tagozaton  
A matematika tanítása XIV. 3. 65.-72.o.
- VARGA Tamás /1967./: Combinatorials and probability for  
young children Part I.  
The International Study Group for Mathematics Learning,  
Scherbroke
- VARGA Tamás /1969./: A gondolkodás rugalmassága és a variá-  
ciók  
Magyar Tudomány, 1969. 637.-647.o.
- VILENKIN, N.J. /1931./: Kombinatorika  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- WALLON, H. /1971./: Válogatott tanulmányok  
Gondolat Kiadó, Budapest
- WELLS, B.M. /1971./: Elements of combinatorial Computing  
Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney